# QUELQUES TECHNIQUES ET DEBUTS DE DEMONSTRATION

1. $A$ et $B$ étant 2 ensembles, $\boxed{\text{pour montrer que } A \subset B}$ , on commence la démonstration par :
   $\boxed{\text{"Soit } x \in A \text{ alors ... } \qquad\qquad \text{...} x \in B\text{"}}$.

2. Pour montrer que 2 **ensembles** sont égaux, on utilise : **A=B** $\Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.

3. Pour montrer que 2 **applications** sont égales : Soient 2 applications $f$ et $g$ ayant même ensemble de départ $E$ et même ensemble d'arrivée $F$. Par définition, **f=g** $\Longleftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.
   On commence la démonstration par : $\boxed{\text{"Soit } x \in E \text{ alors } f(x) = \text{...} \qquad\qquad \text{...} = g(x)\text{"}}$.
4. **Définition** : image directe et image réciproque
   Soit $A \subset E$, alors $\boxed{f(A) = \{y \in F / \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}} = \{f(x)/x \in A\}$

   Dans un exercice : $y \in f(A) \Longleftrightarrow$ ...

   Soit $B \subset F$, alors $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}}$. $f$ **n'est pas forcément bijective !**

   Dans un exercice : $x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow$ ...

5. Soient $E$ et $F$ 2 ensembles et soit une application $f : E \longrightarrow F$.
   **Définition 1** :$f$ est injective si tout élément de $F$ a au plus un antécédent.
   **Caractérisation 1** : $\boxed{f \text{ est injective} \Longleftrightarrow [\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x']}$
   **Définition 2** : $f$ est surjective si tout élément de $F$ a au moins un antécédent.
   **Caractérisation 2** : $\boxed{f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow [\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)]}$

   Dessin n°1

   $f$ est injective (non surjective)

   Dessin n°2

   $f$ est surjective (non injective)

6. Les changements d'indice licites sont : $\boxed{k' = k + p}$ ou $\boxed{k' = -k + p}$ ( $p \in \mathbb{Z}$ est fixé).

   **Exercice 1** : faire le changement d'indice $k' = k - 2$ dans S=$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-3}$.
   Attention : le changement d'indice "k'=2k" est interdit : pour vous en convaincre, écrivez en extension $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} u_{2k}$ et $s' = \displaystyle\sum_{k'=0}^{4} u_{k'}$.
7. $\boxed{\textbf{Séparation des termes d'indices pairs et impairs sur un exemple}}$ : TRES UTILE !

   $$\sum_{k=1}^{2n+1} u_k = u_1 + u_2 + u_3 ..... + u_{2n} + u_{2n+1} = (u_1 + u_3 + ... u_{2n+1}) + (u_2 + u_4 + .... u \qquad ) = \sum_{p=..} u_{2p+1} + \sum_{p=..} u_{2p}$$

   **Exercice 2**, à faire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_k =$
   Technique dans le cas général : (plus théorique)
   On utilisera la propriété suivante, à connaitre : si $\boxed{p \in \mathbb{Z}}$, et $x \in \mathbb{R}$, alors : $p \leq x \Longleftrightarrow p \leq \lfloor x \rfloor$
   (par exemple : $p \leq 4,8 \Longleftrightarrow p \leq 4$)

   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \Big( \sum_{k \text{ pair et } 0 \leq k \leq n} u_k \Big) + \Big( \sum_{k \text{ impair et } 0 \leq k \leq n} u_k \Big) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} u_{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} u_{2p+1} = \sum u_{2p} + \sum u_{2p+1}$$

**Exercice 3, CLASSIQUE, à connaitre** : On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Ecrire $S_{2n}$ avec des points de suspension.

2) Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$ en fonction de $S_{2n}$ et de $S_n$.

8. Au prochain DS (et les suivants), les questions d'info devront être traitées (point négatif si rien n'est proposé).

   Savoir calculer une somme en info, par exemple $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{30} \frac{1}{k^2+1}$ :

```
s=0
for k in range(0,31): # Attention au décalage d'une unité dans la borne supérieure
    s=s+1/(k*k+1)
print(s)
```

   **Remarque** : range(0,31), ou range(31), parcourt les entiers entre 0 et **30**.

9. **Utilisation de l'unicité** :
   S'il a été montré qu'il existe un unique élément $x_0$ vérifiant une propriété $\mathcal{P}$, et que l'on vous demande : "montrer que $y = x_0$", il suffit de montrer que : "$y$ vérifie $\mathcal{P}$".
   **Exercice 4** : Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' - x^2y = x^2 - 1$. On admet (pour l'instant) le théorème de Cauchy linéaire qui dit que : (E) admet une unique solution $f$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que $f$ est paire.

   **exercice 5**, à faire : Soient $A$ et $B$ 2 polynômes réels tels que $B \neq 0$. Si $Q$ et $R$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ dans $\mathbb{C}[X]$, alors montrer que ce sont également le quotient et le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ dans $\mathbb{R}[X]$.

10. Tracer sur un même dessin la première bissectrice, et les courbes de $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^3$.
    Pour $x \geqslant 0$, comparer $x$ et $x^3$.
    A savoir : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } x \geqslant 1, & x^n \geqslant x \\ \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, & x^n \leqslant x \end{array}}$ Comparer $x$ et $\sqrt{x}$...

11. **petite formule à savoir redémontrer** (HP c'est à dire Hors-Programme) :
    soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$

    **dém** :....

    Une technique pour obtenir une inégalité : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour montrer que $\alpha \leqslant \beta$, on montre que $\beta - \alpha \geqslant 0$.
    D'autres techniques : ?

12. **"$\forall n \geqslant 4,\quad H_{n+2}$ est vraie"** $\Longleftrightarrow$ "$\forall n \geqslant$ .........., $\quad H_n$ est vraie".
    **démonstration** : on peut poser $n' = n+2$, or $n \geqslant 4 \Longleftrightarrow$ ...
    (mais il est plus rapide de remarquer que la première étape correspond à $H_6$).

13. Si $n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$, mais par convention : $\boxed{0^0 = 1}$.

    **Exercice 5** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} 0^k = ...$

14. N'oubliez pas vos parenthèses : n+1 !=n+1≠(n+1) !