SOMMES SUPER IMPORTANTES

Toutes les formules qui suivent peuvent se démontrer par récurrence.

FORMULES 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 1 : Pour $n \geqslant 3$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n-2} k^2$

FORMULE 2 : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall z \in \mathbb{C} \text{ et } z \neq 1 : \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$

Remarque : Pour $z = 1$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n = n+1$

Généralisation : $\forall (n,i) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant i,\ \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 1$, $\boxed{z^i + z^{i+1} + z^{i+2} + \cdots + z^n = \frac{z^i - z^{n+1}}{1-z}}$

Démonstration, la plus simple : $z^i + z^{i+1} + z^{i+2} + \cdots + z^n = z^i(1 + z + \cdots + z \quad\ ) = z^i \frac{1-z}{1-z} =$

"Autre" démo, (plus rigoureuse) : on veut ramener la borne inférieure à 0 dans

$S = \sum_{\boxed{k=i}}^{n} z^k$: on pose $k' = ...$, alors $S = \sum_{k'=...} ...$

Exercice 2 : Pour $n \geqslant 1$, factoriser en produits de 2 facteurs $1 - z^n =$

FORMULE 3 : Une factorisation, $\forall n \geqslant 1$, $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1})} = (a-b)(\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k})$$

Démonstration : on développe le terme de droite et on simplifie.

Pour retrouver la formule (si on l'a oublié), on utilise le résultat de l'exo 2 : si $a \neq 0$,
$a^n - b^n = a^n(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n) = a^n(1 - ...$

Application : pour $n = 2$: $a^2 - b^2 = ...$ et pour $n = 3$: $a^3 - b^3 = ...$

FORMULE 4 : Formule du binôme : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=}^{...} \qquad\qquad}$

Application : $(a+b)^3 = ...$

Rappel : Identification de 2 polynômes :

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{r} b_k X^k \iff r = n \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!], a_k = b_k}$ par "unicité des coordonnées...".

Exercice 3 : $P(X) = -X^3 + 2X^2 + X - 2$. On remarque que $P(1) = 0$:
donner 2 méthodes pour factoriser $P(X)$ par $(X-1)$.

Exercice 4 : Démontrer la formule suivante (Vandermonde) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

On commencera par écrire : $(1+X)^{2n} = ...$