$\boxed{\mathbb{N}\ ,\mathbb{Z}\ ,\mathbb{Q}\quad ,\mathbb{R}}$

I. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ = l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$ = l'ensemble des entiers relatifs.

1. Propriété caractéristique de $\mathbb{N}$:

   (a) $\boxed{\text{Toute partie non vide de } \mathbb{N} \text{ possède un plus petit élément}}$ (c'est-à dire :

   $\forall A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, ...

   (b) $\boxed{\text{Toute partie non vide et majorée de } \mathbb{N} \text{ possède un plus grand élément}}$ (c'est-à dire :

   $\forall A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ et A majoré, $\exists a \in A, \forall x \in A, \quad x \leq a$.

2. **Division euclidienne**
   Théorème : $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\exists ! (q,r) \in \mathbb{N}^2 \ / \ a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

3. **Récurrence**
   Raisonnement par récurrence : $n_0 \in \mathbb{N}$, fixé. Soit H_n une assertion dépendant de n. Pour montrer que H_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut raisonner par récurrence.
   On rédige ainsi :
   $*$ **Le premier pas** : on montre que H_{n_0} est vraie.
   $*$ **l'hérédité** : soit $n \geqslant n_0$, n fixé.
   On suppose que H_n est vraie, et on montre que H_{n+1} est vraie.
   Conclusion : $\forall n \geqslant n_0$, H_n est vraie.

   Rappel : $\boxed{\text{une fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ est paire si } \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)}$,
   $\boxed{f \text{ est impaire si } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)}$.
   exercice 1 : On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ par :
   $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = x^2 - 1, f_1(x) = 2x$ et $\forall n \geqslant 2, f_n(x) = 3x f_{n-1}(x) - 2 f_{n-2}(x)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de même parité que n.
   b) Déterminer $f_n(1)$ puis en déduire $f_n(-1)$.
   A connaitre : $[f_n$ est de même parité que $n] \iff [\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(-x) =$......... $]$.

   Exercice 2 : $\boxed{\text{TECHNIQUE TRES CLASSIQUE}}$
   Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n^2$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \mathbb{Z}$. (Attention au premier pas !)

   Récurrence à 2 pas : on a besoin de H_n et H_{n+1} pour montrer que H_{n+2} est vraie.
   On rédige ainsi :
   $*$ on montre que H_{n_0} **et** H_{n_0+1} sont vraies.
   $*$ soit $n \geqslant n_0$, n fixé. On montre que si H_n et H_{n+1} sont vraies alors H_{n+2} est également vraie (c'est **l'hérédité**).
   Conclusion : $\forall n \geqslant n_0$, H_n est vraie.

   Récurrence forte :
   Si on a besoin de H_{n_0},H_{n_0+1}...H_{n-1}, H_n pour montrer H_{n+1} est vraie, alors on fait une récurrence forte :
   Pour l'hérédité, on rédige :
   $*$ Soit $n \geqslant n_0$, n fixé. On suppose que pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$, H_k est vraie,et on montre que H_{n+1} est vraie.

Cherchez l'erreur : On reprend l'exo2, on note H_n : "$u_n \in \mathbb{Z}$", et on fait une récurrence forte.
$*$ **Premier pas** : H_0 est vraie.
$*$ **Hérédité** : Soit $n \geqslant 0$, n fixé. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, H_k est vraie, alors $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}^2 \in \mathbb{Z}$.
Peut-on conclure ?
L'erreur de raisonnement se situe ...
Moral :
Ne pas remplacer une récurrence à 2 pas (qui est fréquente dans les exos), par une récurrence forte (plus rare).

II. $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} / \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

Ecriture d'un rationnel : $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists!(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$, p et q premiers entre eux / $r = \dfrac{p}{q}$.

Propriété de $\mathbb{Q}$: $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

Définition : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
Définition : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

1. $\mathcal{R}$ est dit réflexive si : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
2. $\mathcal{R}$ est dit symétrique si : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \ \Rightarrow\ y\mathcal{R}x$.
3. $\mathcal{R}$ est dit antisymétrique si : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow\ x = y$.
4. $\mathcal{R}$ est dit transitive si : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$.

III. $\mathbb{R}$

Définition : Si elle existe, $\boxed{\text{la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit de ses majorants}}$.

Définition : Si elle existe, $\boxed{\text{la borne inférieure d'un ensemble est le plus grands de ses minorants}}$.

1. **"Définition" de $\mathbb{R}$**

   On admet qu'il existe un unique ensemble, noté $\mathbb{R}$, tel que :
   * $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.
   * $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
   * $\boxed{\text{Toute partie non vide majorée de } \mathbb{R} \text{ possède une borne supérieure}}$.
   * $\boxed{\text{Toute partie non vide minorée de } \mathbb{R} \text{ possède une borne inférieure}}$.

   Remarques :

   (a) Les seules règles qui manipulent l'ordre et les opérations sont :

   i. $\forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \Longrightarrow x + a \leqslant y + a.$

   ii. $\forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \text{ et } \underline{a \geqslant 0} \Longrightarrow ax \leqslant ay.$

   iii. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \text{ et } \underline{a \leqslant 0} \Longrightarrow ay \leqslant ax.$

   conséquences et autres propriétés : si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases}$, alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$.

   $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \boxed{0 < a \leqslant b \implies \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}}$ car $x \to \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur ...

   $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b < 0 \Longrightarrow$ ...

Attention : pas de soustractions ni de divisions avec $\leqslant$

   (b) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Par exemple : $\sqrt{2},\ \pi,\ e$ ne sont pas ...

   (c) Caractérisation d'une borne sup : Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A \quad (\text{c'est à dire : } \forall x \in A \ :\ x \leqslant \alpha\ ) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \alpha - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A, (\text{c'est à dire : } \exists a \in A \text{ tel que } a > \alpha - \varepsilon) \end{cases}}$$

$$\boxed{\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A \ :\ x \geqslant \beta \quad (\beta \text{ est un minorant de } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a < \beta + \varepsilon \end{cases}}$$

   Propriété :

   Si $\sup A$ appartient à A, alors $\sup A$ est le plus grand élément de A, et $\sup A$ est alors noté $\boxed{\mathrm{Max} A}$. (appelé aussi le maximum)

   Si $\inf A$ appartient à A, alors $\inf A$ est noté $\boxed{\min A}$. (=le plus petit élément ou le minimum)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, suite et fin

Caractérisation séquentielle (avec les suites)

$$\boxed{\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant \alpha \quad (\alpha \text{ majore } A) \\ \exists (a_n)_n \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \alpha \end{cases}}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \geqslant \beta \quad (\beta \text{ minore } A) \\ \exists (a_n)_n \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \beta \end{cases}$$

Démonstration : La faire en exercice en s'aidant d'un petit dessin.

Exemples : Si $A_1 =]1,2]$, alors inf A_1=1, A_1 n'a pas de minimum, sup A_1=maxA_1=2,

et si $A_2 = \{\frac{-1}{n}\ /\ n \geqslant 1\}$...

2. **Valeur absolue, encadrement**

Définition : $\mid x \mid = Max\{x, -x\}$.

caractérisation : $\boxed{\begin{array}{l} \mid x \mid = x \text{ si } x \geq 0 \\ \quad = -x \text{ si } x < 0 \end{array}}$

Propriétés : (a) $\mid x \mid \geqslant 0$ (b) $\mid -x \mid = \mid x \mid$ (c) $\mid x \mid = 0 \iff x = 0$ (d) $\mid xy \mid = \mid x \mid \mid y \mid$

(e) $\boxed{\mid \mid x \mid - \mid y \mid \mid \underset{(1)}{\leqslant} \mid x + y \mid \underset{(2)}{\leqslant} \qquad\qquad}$ (2) : inégalité triangulaire

Généralisation : $\mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mid \leqslant$

(f) $\mid x - y \mid \geqslant$

Encadrement : soit $\alpha \geq 0$

(a) $\boxed{\mid x \mid \leqslant \alpha \iff \qquad \leqslant x \leqslant \qquad}$

Conséquence : $\mid x - a \mid \leqslant \alpha \iff$

(b) $\boxed{\mid x \mid \geq \alpha \iff x \qquad\qquad}$

exercice 3 : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n + \frac{1}{n+1} \leqslant S_n < I_{n+1}$. Donner un encadrement de I_n pour $n \geq 1$.

Entre nous, on pourra dire qu'on "casse" l'encadrement (en 2 inégalités).

Propriété : $\boxed{\sqrt{x^2} = ...}$. Exe : $\sqrt{(-3)^2} = ...$

3. **Partie entière**

théorème-définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! n \in \mathbb{Z}\ \ /\ n \leqslant x < n + 1$.
n s'appelle alors la partie entière de x et se note $\lfloor x \rfloor$.

Caractérisation : $n = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leqslant x < n + 1 \end{cases}$ **Propriété** : $\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}$

Exemples : $\lfloor \sqrt{2} \rfloor =$, $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor =$.

graphe sur [-2,2] :

Propriétés : $*$ La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ...
$*$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

exercice 4 : Si $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $p \leqslant x \iff p \leqslant \lfloor x \rfloor$.

4. **Densité**

Définition : $A \subset \mathbb{R}$ est dit dense dans $\mathbb{R}$ si : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y$, $\exists a \in A$ tel que $x < a < y$.

Remarque : La densité de A exprime que l'on peut toujours "glisser" un élément de A entre deux réels quelconques.

Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

5. **Sommation**

Écriture en extension, pour comprendre : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$ (mais $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} x_i =$

$S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a =$ si $p \leq n$, $S_2 = \boxed{\displaystyle\sum_{i=p}^{n} 1 = \quad}$

$P_3 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a =$ $P_4 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i y_i =$

$P_5 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (-x_i)$

Somme double. **Intervertion des sommes** :

$$S_6 = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_{i,j} = \sum_{j=..} \sum_{i=..} x_{i,j}}$$

$S_7 = \boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=..} \sum_{i=..} x_{i,j}}$ que l'on trouve aussi souvent sous la forme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{i,j}$

Explication :

Exercice 5 : Calculer $S_8 = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}$

Exercice 6 : Transformer en une somme double : $S_9 = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \sqrt{i+j}$

Ecrire S_9 en commençant par tous les cas possibles pour i : $i = 1, i = 2$...

$$S_9 = \sum_{j=\ldots}^{\ldots} \sqrt{1+j} + \sum_{j=\ldots}^{\ldots} \sqrt{2+j} \ldots$$

$$S_9 = \sum_{i=1}^{\ldots} \sum_{j=\ldots}^{\ldots} \sqrt{i+j}$$

à savoir : $\boxed{\text{si } i \text{ et } j \text{ sont 2 entiers, alors } i < j \Leftrightarrow i+1 \leqslant j}$.

démo : $i < j \Leftrightarrow j - i > 0 \Leftrightarrow j - i \geqslant 1 \Leftrightarrow j \geqslant i + 1$.