PROGRAMME DE COLLE N°1

SPE PSI

du 11 au 22 septembre 2023

Attention : plusieurs questions de cours (définitions formules...) peuvent être demandées avant les exercices.

Formulaire des dérivées classiques : pour le mini DM (mis en ligne)

Premiers Rappels :
Définition d'une application injective, surjective, de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$, raisonnement par contraposée.

Technique sur les sommes : savoir séparer les indices pairs et les indices impairs :
surtout les cas simples $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1} + \sum_{p=1}^{n} a_{2p}$, (et avec d'autres bornes...) .

(et plus généralement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{0\leq 2p\leq n} a_{2p} + \sum_{0\leq 2p+1\leq n} a_{2p+1} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} a_{2p+1}$ ou d'autres cas)

Formules : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$, formule du binôme et factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.
Savoir retrouver rapidement $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} z^k$ (en posant $k' = k - i$ par exemple)

Exercice classique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, à l'aide de $(1+X)^{2n}$ (+**dém**).

Trigo : toutes les formules usuelles, dont les formules de transformation :
savoir retrouver $\cos(a)\cos(b)$... et $\cos(p)+\cos(q)$... (+**dém**).
Si $z = a + ib$ avec $a \neq 0$, savoir déterminer $\rho > 0$ et θ tels que $z = \rho e^{i\theta}$ (+**dém**).
et en DM, révision de arccos, arcsin et arctan.

$\mathbb{N}$ - $\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Q}$ - $\mathbb{R}$:

Raisonnement par récurrence, récurrence à 2 pas et récurrence forte.
Définition et caractérisation de la borne supérieure (et inférieure), caractérisation séquentielle.
Partie entière d'un réel, et surtout $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$
Inversion de sommes : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}$ **+explication** avec encadrement à redonner :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ \underline{i \leq j} \leq n \end{array}\right. \iff 0 \leq \underline{i \leq j} \leq n \iff \left\{\begin{array}{l} 0 \leq j \leq n : \text{première ligne avec bornes FIXES} \\ 0 \leq \underline{i \leq j} \end{array}\right.$$

$\mathbb{C}$: Ecriture d'un complexe : $a + ib$, $\rho e^{i\theta}$.
Linéarisation (pour calcul de primitives), délinéarisation.
Factorisation par l'angle moitié : $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}})$...
Exercice classique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$ (+**dém**).

Propriétés des racines n-ièmes de 1 ($\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$) (+**dém** des 2 propriétés)
Racines n-ième d'un complexe de la forme $\rho e^{i\theta}$,
et racines carrées d'un complexe quelconque (application : équation du second degré).
$\displaystyle X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$ et $\displaystyle 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$.