NOMBRES COMPLEXES-GEOMETRIE

I Définitions - Ecritures

1. **Définition**

   $\mathbb{C} = \{a + ib$ tels que $(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

   Si $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a =$Re z et $b =$Im z.

2. **Conjugué-Module-Argument**

   Soit $z = a + ib$ avec a, b : réels.

   conjugué de z : $\bar{z} = a - ib$,

   module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **Propriété** : $|z|^2 = z\bar{z}$.

   Application : pour déterminer les parties réelles et imaginaire de $\frac{1}{z} =$, on écrit $\frac{1}{z} =$

   Théorème-définition : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\exists! \rho > 0$ et $\exists \theta$ (unique à 2π-près) tels que

   $\boxed{z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$ (écriture trigonométrique d'un nombre complexe)

   On a : $\rho = |z|$ et θ est appelé l'argument de z.

   A savoir $\boxed{|e^{i\theta}| = ...}$

   Théorème : Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, avec $\rho, \rho' > 0$ et θ, θ' : réels.

   On a $z = z' \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$

   Formules :

   $\rho e^{i\theta}.\rho' e^{i\theta'} =$.

   Formule de Moivre : Soit $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n =$ $\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = ...}$

   $\boxed{\text{Application}}$: $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} =$...

II Pratiques des nombres complexes

1. **Formules d'EULER**

   $\cos\theta =$ et $\sin\theta =$

   Exercice 1 :mettre sous forme $re^{i\alpha}$, avec $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

   a) $1 - e^{i\theta} =$

   b) $i + e^{i\theta} =$

   On utilise les **Formules d'Euler généralisées** : (on factorise par "l'angle moitié")

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} =$

et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} =$

$\boxed{\text{exercice 2 : très classique}}$: Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$.

exercice 3 : calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

2. **Linéarisation-Délinéarisation**
   (a) $\boxed{\text{Linéarisation}}$: C'est écrire un polynôme en cos et sin comme combinaison linéaire des "$\cos kx$" et "$\sin kx$". On utilise les formules d'Euler , on développe et on regroupe les termes deux par deux.
   exercice 4 : Linéariser $\sin^3 x =$

   (b) $\boxed{\text{Délinéarisation}}$: c'est le contraire de la linéarisation. On utilise la formule de Moivre : $\cos kx = \text{Re}(e^{ikx}) = \text{Re}((e^{ix})^k) = \text{Re}(\cos x + i \sin x)^k$ et $\sin kx = \text{Im}(\cos x + i \sin x)^k$.
   exercice 5 : Ecrire $\cos 3x$ sous la forme d'un polynôme en $\cos x$

3. **Racine n-ième de l'unité**
   Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe racine du polynôme :
   Soit $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega_k =$ on a $\omega_0 =$, $\omega_n =$ et $\omega_k = \omega_1^k$.

   Théorème : $\boxed{\text{Les racines n-ième de l'unité sont les } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n-1}$
   (il y a exactement n racines n-ième de l'unité).

   $\boxed{\text{Propriétés}}$:

   i) $\omega_{n-k} =$

   ii) Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ième de l'unité vaut . C'est-à-dire :
   démonstration :

$\mathbb{C}$, suite et fin

Interprétation géométrique : L'ensemble des points d'affixes les racines n-ième de l'unité forme un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exemple : Donner les racines cubiques de l'unité sous forme exponentielle et algébrique, donner ses propriétés et tracer le polygone correspondant.

Utilisation des racines n-ième de l'unité

$*$ Résolution de l'équation $\boxed{z^n = a}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$: mettre a sous la forme $\rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$,

puis on résout : $z^n = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow z^n = \left(\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$: on pose $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$

$$z^n = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \frac{z}{z_0} = ...$$

exercice 6 : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 4j$

$*$ Factorisations : $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=}}$

dém :

et $\boxed{X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X^2 + X + 1 = \prod_{k=}}$

dém :

4. **Racine carré-Equation du second degré**
   Soit $Z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = Z_0$. On pose $z = x + iy$

$$\text{On a } z^2 = Z_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{égalité des parties réelles} \\ \text{égalité des modules} \\ \text{égalité des parties imaginaires} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Re }(z^2) = \text{Re}(Z_0) \\ \\ |z|^2 = |Z_0| \\ \\ \text{Im }(z^2) = \text{Im }(Z_0) \text{ pour le signe} \end{cases}$$

   Conséquence : Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$.
   On note $\Delta = b^2 - 4ac$ et on détermine $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

   Les solutions de cette équation sont : $z =$ et $z =$

   exercice 7 : Calculer les racines carrées de $1 + 4i\sqrt{3}$.

5. **Résoudre** $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^*$.
   $\boxed{\text{On factorise par } \sqrt{a^2 + b^2}}$ En effet,
   on sait que $a + ib = \rho e^{i\phi}$ avec $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\phi)$ et $b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\phi)$.

   On a donc $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c \Longleftrightarrow ...$

   exercice 8 : Résoudre $\cos(\theta) + \sin(\theta) = 1$

6. **Géométrie des nombres complexes**, à lire :
   Soit A d'affixe $z_A \in \mathbb{C}$, B d'affixe z_B et C d'affixe z_C : 3 points distincts.
   Alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, $AB = |z_B - z_A|$, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

   On note $z_0 = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

   3 points distincts (A, B, C) sont alignés si et seulement si $z_0 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z_0 = \bar{z}_0$
   A savoir : $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\bar{z}$
   démo : en écrivant $z = a + ib$
   Transformations dans le plan :
   Reconnaitre les applications qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' dans les cas suivants :
   $z \longmapsto e^{i\theta}z$ est une rotation d'angle θ.
   $z \longmapsto z + b$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b
   $z \longmapsto kz$ où $k \in \mathbb{R}$, est une homothétie de centre O, de rapport k
   $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

7. **Exponentielle complexe**

   Définition : Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $e^z = e^a e^{ib}$.

   On a donc $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$.

   Complétez : $|e^z| =$ $\arg(e^z) =$ $\text{Re}(e^z) =$ $\text{Im}(e^z) =$