PROGRAMME DE COLLE N°2

SPE PSI

du 25 septembre au 6 octobre au 2023

Merci aux professeurs de demander en début de colle 1 DL classiques à l'ordre 3

Remarque pour les élèves : Il vaut mieux bien connaitre les résultats de cours que la démonstration facultative. Un élève qui la refuse n'est en aucun cas sanctionné (mais il doit connaitre les petites démo).

Révision en exo : thm (et inégalité) des accroissements finis.

Polynômes : peu d'exercices, le but est seulement de savoir factoriser (on reverra les polynômes et en particulier les racines d'ordre $s \geq 2$, plus tard)
Division euclidienne. Reste de la division euclidienne de P par $X - a$ (+**dém**).
Factorisation d'un polynôme qui admet n racines distinctes .

Suites de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:
Exo classique : théorème de de Césaro.(+**dém facultative**, l'élève pourra demander l'énoncé).
Théorème des gendarmes (ou de l'encadrement). Suite adjacentes.
Suites extraites. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers L alors $(u_n)_n$ converge vers L
Comparaison de suites : O ; o ; $\sim$.
Propriétés. (dont : $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$).
Croissances comparées, en 0 et en $+\infty$ des fonctions habituelles : $\ln x, x, e^x$ et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha z^n$ si $|z| < 1$ (+**dém**).
Pour une suite complexe : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lambda \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re}\lambda$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im}\lambda$ (+**dém**)

Suites récurrentes :

Surtout : **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2** (suites réelles et complexes)
Suite arithmético-géométrique.
Suites définies par la relation $f_n(u_n) = 0$. Thm de la bijection avec hypothèses précises (et préciser l'espace de départ et d'arrivée). Monotonie de $(u_n)_n$ grâce au signe de $f_n(u_{n+1})$.
Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, rappel uniquement du thm fondamental : si $(u_n)_n$ converge vers L et si f est continue en L alors $L = f(L)$.

Développements limités :

Formule de Taylor-Young.
Propriétés : unicité, troncature, parité, somme, produit **(au même ordre !)**, composée sur des exemples (il faudra toujours préciser que la "nouvelle variable" tend vers 0...), inverse, primitive.
Connaitre par coeur les 3 ou 4 premiers termes (et si possible le $n$ième) des DL. en 0 de :

$$\frac{1}{1-x} \qquad e^x \qquad \mathrm{ch}x \qquad \mathrm{sh}x \qquad \sin x \qquad \cos x \qquad \ln(1+x) \qquad \ln(1-x) \qquad (1+x)^\alpha$$

Savoir retrouver rapidement les D.L. en 0 de : $\arctan x$ à l'ordre $2n+1$, $\arcsin x$ à l'ordre 5, et $\tan x$ à l'ordre 3 (+**dém** à l'aide de tan').
Conséquences géométriques : tangente et asymptote + position par rapport à la courbe.
Exercice très classique : $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{a}{n})^n = e^a$ (+**dém** et résultat à connaitre).

antipropriétés : "pas d'équivalent à 0", pas de somme,
pas de fonctions d'équivalents à part u_n^a et $|u_n|$.

Intégration sur un segment : positivité de l'intégrale sur un segment, primitives (surtout $\displaystyle\int_a^b u'(t) f'(u(t))\,\mathrm{d}t$) méthode des rectangles (surtout le cas particulier $a = 0$ et $b = 1$), IPP, formule de Taylor reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange (+**dém**).