PRINCIPALES DEFINITIONS SUR LES SUITES REELLES

1. **Définition** : On appelle suite réelle une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $u : n \longmapsto u(n)$.
   Cette suite est notée u ou $(u_n)_n$.
2. **Suite majorée** : $(u_n)_n$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
3. **Suite minorée** : $(u_n)_n$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
4. **Suite bornée** : $(u_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée ou si
   $$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$
5. **Suite croissante** : $(u_n)_n$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$
6. **Suite décroissante** : $(u_n)_n$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$
7. **Suite monotone** : $(u_n)_n$ est monotone si $(u_n)_n$ est croissante ou si $(u_n)_n$ est décroissante.
   C'est-à-dire : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ ou si $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$
8. **Suite strictement croissante** : $(u_n)_n$ est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$
9. **Suite strictement décroissante** : $(u_n)_n$ est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$
10. **Suite strictement monotone** : $(u_n)_n$ est strictement monotone si $(u_n)_n$ est strictement croissante ou si $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

11. **Suite extraite** : $(v_n)_n$ est extrait de $(u_n)_n$ s'il existe une application ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$.
12. **Suite convergente** : $*$ Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
    On dit que $(u_n)_n$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon]$.
    On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

    $*$ On dit que $(u_n)_n$ est convergente si :$\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

    conséquence : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| =$
13. **Suite divergente** : $(u_n)_n$ est divergente si elle n'est pas convergente. C'est-à-dire si :
    $\forall \ell \in \mathbb{R}$ ...
14. **Suite divergente vers $+\infty$** : $(u_n)_n$ est divergente vers $+\infty$ si
    $\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$: $u_n \geqslant A$.
15. **Suite divergente vers $-\infty$** : $(u_n)_n$ est divergente vers $-\infty$ si
    $\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$: $u_n \leqslant -A$.
16. **Suite stationnaire** : $(u_n)_n$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$: $u_n = u_{n_0}$.
17. **Suites adjacentes** :

$(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont dites adjacentes si :
$(a_n)_n$ est croissante , $(b_n)_n$ est décroissante (ou l'inverse) et $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

    Théorème : Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes alors elles convergent et ont la même limite.
    Remarque : ces définitions restent valables si les suites sont définies à partir d'un certain rang.
18. Un outil important pour la comparaison des suites, les croissances comparées :

    $*$ Soit $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < 1$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha z^n =$

    $*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} =$

    $*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} =$

    $*$ $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x =$

PRINCIPALES PROPRIETES SUR LES SUITES REELLES

1. Toute suite convergente est bornée.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite croissante :
   a) $(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(u_n)_n$ est ...
   Dans ce cas, si on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n.....\ell$. (comparez)
   b) si $(u_n)_n$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ...$

3. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante :
   a) $(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(u_n)_n$ est ...
   Dans ce cas, si on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n.....\ell$.
   b) si $(u_n)_n$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ...$
   Csq : si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes avec $(a_n)_n$ croissante et $(b_n)_n$ décroissante, on note L leur limite commune, alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant L \leqslant b_n.$$

4. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq v_n$ et **si** $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   Remarque : pas de passage à la limite, si on n'a pas vérifié que toutes les suites convergeaient.
   Attention : $-\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2n}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (pas d'inégalité stricte par passage à la limite).

5. **Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)** : si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite L, alors $*$ $(u_n)_n$ converge et
   $$* \lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

6. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

7. Si $(u_n)_n$ est bornée et si $(v_n)_n$ converge vers 0, alors $(u_n v_n)_n$ converge vers ...

8. a) Si $(u_n)_n$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers L.
   Conséquence : Si 2 suites extraites de $(u_n)_n$ convergent vers 2 limites $\neq$, alors $(u_n)_n$ n'a pas de limite (ni fini, ni infini).
   b) $\boxed{\text{Si } (u_{2n})_n \text{ et } (u_{2n+1})_n \text{ convergent vers la même limite } L \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ alors } (u_n)_n \text{ converge vers } L}$.

9. **Comparaison de suites : caractérisation** : si à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$, alors

   $u_n = O(v_n)$ si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.

   $u_n = o(v_n)$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

   $u_n \sim v_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 1$.

   Propriété 1 : $\boxed{\text{si } u_n = o(v_n), \text{ alors } u_n + v_n \sim ...}$ car ...
   Par exemple, , à connaitre : $\boxed{n + \ln n \sim ....}$
   Propriété 2 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ et v_n est bornée alors $u_n + v_n \sim ....$
   Par exemple, $\sin n + \ln n \sim ...$

   Propriété 3 : ATTENTION !!! $\boxed{u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \ ...}$ $\Longleftrightarrow u_n = ...$
   Exe : $u_n = n^2 + n \sim v_n = ...$

10. **Croissances comparées** : si $\alpha > 0$, $\beta > 0$,alors :
    $$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad n^\beta = o(e^n), \ \text{ et } \qquad e^n = o(n!)$$
    ("entre nous" :$(\ln n) << n << e^n << n!$) et les puissances strictement positives conservent cet ordre)

11. Une façon d'obtenir des équivalents : si $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$, et si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.
    Exemple : $\sin(\dfrac{1}{n^2}) \sim ...$