DEVELOPPEMENTS LIMITES

Comparaison des fonctions :
Comme pour les suites : on a des définitions et une première caractérisation analogue pour les fonction au voisinage d'un réel a (fini ou infini).

Par exemple, si g ne s'annule pas dans un voisinage de a, alors : $\left[f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \right]$

déf : $f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow$ il existe une fonction ε telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
Vous pouvez donc remplacer $\boxed{o(g(x)) \underset{a}{=} g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0}$.

Csq : $o(x^n) - o(x^n) \underset{0}{=} o(x^n)$ $\qquad x^p o(x^n) \underset{0}{=} o(...$ $\qquad$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{o(\alpha\, x^n) = o(x^n)}$

Attention : $\boxed{\text{PAS D'EQUIVALENT à 0}}$ (sauf pour la fonction nulle)

Au voisinage de 0 : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0 \text{ si } a... \qquad \text{et } \lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty \text{ si } a.....}$ et si $a = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a = ...$
exo 1 : Equivalents simples en 0 et $+\infty$ de $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x$: $P(x) \underset{0}{\sim} ....$, $P(x) \underset{+\infty}{\sim} ...$
Le bon réflexe : a-t-on au voisinage de 0^+ : $\ln x = o(\dfrac{1}{x})$ ou $\dfrac{1}{x} = o(\ln x)$?
IL FAUT FAIRE LE...

$\boxed{\text{Définition}}$: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, f a un D.L. au $\mathcal{V}(x_0)$ si $\exists (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

Premier D.L. : On retrouver le D.L. de $\dfrac{1}{1-x}$ au $\mathcal{V}(0)$ en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k =$

Formule de Taylor Young au $\mathcal{V}(x_0)$: Soit f de classe ... sur I (contenant x_0)
alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x - x_0)^n)$ $\qquad$ avec la convention $f^{(0)} = ...$

La FTY permet de déterminer les DL de $e^x, \cos x, \sin x, \text{ch}x, \text{sh}x$ et de $(1 + x)^\alpha$ si on connait :
$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{d^k}{dx^k}(x^\alpha) = \qquad}$

$\boxed{\text{Retour à 0}}$: Pour un D.L. de $f(x)$ au $\mathcal{V}(x_0)$, on peut poser $u = x - x_0$.
Comme $\lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0) = 0$, on fait un D.L. d'une fonction **en u** au $\mathcal{V}(0)$.
exercice 2 : D.L. de $\cos x$ à l'ordre 3 au $\mathcal{V}(\frac{\pi}{4})$

Développement limité au $\mathcal{V}(+\infty)$: on peut poser (si on veut) X$=\dfrac{1}{x}$ et on remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
exercice 3 :D.L. de $f(x) = \dfrac{x}{1-2x}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$ à l'ordre 2.
Propriété 1 : première obtention d'équivalent : $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \text{ alors } f(x) \underset{x_0}{\sim} L}$

exercice 4 : équivalent simple au $\mathcal{V}(2)$ de $P(x) = 2 + 3x$, et de $Q(x) = 4 - x^2$.

$\boxed{\text{Propriété 2 : unicité du D.L.}}$ (c'est à dire des (a_k)).
Conséquence : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. $\boxed{\text{Si } f \text{ est } C^n}$ au $\mathcal{V}(x_0)$, et si $\forall x \in I$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$, alors $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\quad a_k = ...$

Propriété 3 : Parité : Si f a un D.L. au $\mathcal{V}(0)$ et si f est paire alors sa partie régulière P est un polynôme pair (de même pour impair). (et P est pair $\iff P(-X)=P(X) \iff P(X)=a_0+a_2X^2+...+a_{2n}X^{2n}$)
Propriété 4 : Troncature : Soit $p \leqslant n$.
Si $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots$ $\quad ...+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$
alors $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_p(x-x_0)^p+o((x-x_0)^p)$
Propriété 5 : lien avec la continuité et la dérivation Si $f(x)=a_0+o(1)$ au $\mathcal{V}(x_0)$ et si $x_0 \in I$, alors f est C^o en x_0 (sinon, f est prolongeable par continuité en x_0 en posant $f(x_0)$=...)
Si $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+o(x-x_0)$ au $\mathcal{V}(x_0)$ alors f est, de plus, dérivable en x_0 et $f'(x_0)=a_1$.
remarque : si f a un DL à l'ordre 2, on ne peut pas en déduire que f est 2 fois dérivable en x_0.
Propriété 6 : obtention d'équivalents : Si $f(x)=a_p(x-x_0)^p+o((x-x_0)^p)$ avec $a_p \neq 0$ alors

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

exemple : $\sin x - x = ... \qquad \underset{0}{\sim}$

Opérations Pour faire des sommes et des produits de D.L., on doit faire les D.L. au même ordre (quitte à en tronquer un).
Composition sur des exemples : (en théorie : travailler toujours au même ordre)
exercice 5 : D.L. de e^{2x^2} et de $\cos(\sqrt{x})$ à l'ordre 3 au $\mathcal{V}(0)$.

Primitive : Soit $f: I \to \mathbb{R}, C^\circ$ sur I telle que $x_0 \in I$, et $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

Si F est une primitive de f alors $F(x)=\underline{F(x_0)}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o((x-x_0)^{n+1})$.

csq : le DL de $\ln(1+x)$ au $\mathcal{V}(0)$.

Retrouver les D.L. en 0 de $\arctan x$ à l'ordre $2n+1$, de $\arcsin x$ à l'ordre 5 et de $\tan x$ à l'ordre 4.

exercice 6 : Donner le D.L. de $\ln x$ à l'ordre 3 au $\mathcal{V}(1)$
Rem : Plus rapidement, au $\mathcal{V}(1)$: $\ln x = \ln(1+(x-1)) \underset{1}{=} ...$ car ...
Remarque : Si on sait que f' a un DL à l'ordre n-1, (par exemple si f' est C^{n-1}), alors il s'obtient en dérivant le DL de f (car le DL de f est une primitive de celui de f').
2 TECHNIQUES A CONNAITRE :
exercice 7 : D.L. de e^{1+2x} à l'ordre 2 au $\mathcal{V}(0)$.
exercice 8 : D.L. de $\ln(2+x)$ à l'ordre 2 au $\mathcal{V}(0)$.

exercice 9 : D.L. de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 au $\mathcal{V}(0)$.
Inverse : On utilise $\dfrac{1}{1-u}=...$

exercice 10 : D.L. de $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 au $\mathcal{V}(0)$.

Conséquences géométriques :

$*$ **TANGENTE** : si $f(x) \underset{x_0}{=} a_0+a_1(x-x_0)+a_p(x-x_0)^p+o((x-x_0)^p)$, avec $a_p \neq 0$, alors l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est $y=$ $\qquad =$

et $f(x)-(a_0+a_1(x-x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$ donne la position de la courbe de f par rapport à la tangente.

Exemple : si $p=3$ et $a_p>0$

$*$ **ASYMPTÔTE** : si $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, alors on recherche un développement asymptotique de f au voisinage de l'infini sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^p}+o(\dfrac{1}{x^p})$, avec $c \neq 0$. On a alors $f(x)-(ax+b) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{c}{x^p}$, or $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^p}=0$ donc D :$y=ax+b$ est asymptôte à la courbe de f et le signe de $\dfrac{c}{x^p}$ donne leur position relative.

exercice 11 : $f(x)=(x+1)e^{-1/x}$. Tracer la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et -∞.