Décomposition en éléments simples

A savoir : Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, avec $\alpha\neq\beta$ et P est un polynôme de degré<2, alors
$\exists(a,b)\in\mathbb{K}^2$ tels que $\boxed{\forall x\in\mathbb{K}-\{\alpha,\beta\},\quad \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\dfrac{a}{x-\alpha}+\dfrac{b}{x-\beta}}$.

Généralisation :
si les α_i sont 2 à 2 distincts et d°$P<n$, alors $\exists a_i$ tels que : $\dfrac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(x-\alpha_i)}$

Application $\boxed{\text{Comment déterminer } a \text{ et } b \text{ deux réels tels que : } \dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1} \text{ pour } k\geq 1}$.

Première méthode : Classique et rapide !
On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$, $\quad\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$

$*$ on multiplie par x : $\quad\dfrac{1}{x+1}=a+\dfrac{bx}{x+1}$, puis

on fait tendre x vers 0 : ...

$*$ on multiplie par $x+1$: ...

on fait tendre x vers -1 : $\qquad$ Conclusion : $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dots$

Deuxième méthode : facile mais long. On réduit au même dénominateur puis on "identifie".

$$\forall k\geq 1,\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}\iff\forall k\geq 1,\quad\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$$

$$\iff\forall k\geq 1,\quad 1=(a+b)k+a\iff a+b=0 \text{ et } a=1.$$

Explication de la dernière équivalence : le polynôme $(a+b)X+a-1$ a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

Troisième méthode : "thm belge" ou on devine (c'est le plus rapide si on y arrive)

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1+k-k}{k(k+1)}=\dots$$

Exo : Calculer $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{(x-1)(x-4)}dx$

Exo : Déterminer a, b et c trois réels tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$ pour $k\geq 1$.