POLYNÔMES

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Définition : Un polynôme est une expression $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ avec $a_i \in \mathbb{K}$ (noté aussi $P(X)$).
X est appelé l'indéterminée.

Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}[X]$

Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \neq 0$, alors le degré de P est : $d^0P = \max\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$
Par convention : $\boxed{d^0 0 = -\infty}$

Degré de $P+Q$, et PQ :
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_rX^r$ avec $a_n \neq 0$ et $b_r \neq 0$, alors :

$PQ = a_0b_0 + (\ldots \qquad)X + \quad \cdots \quad + a_nb_rX^{n+r}$ donc $\boxed{d^0(PQ) = \qquad}$

$*$ si $d^0P < d^0Q$, alors $P + Q = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X \;\; \ldots \;\; + (a_n + b_n)X^n + \ldots$

donc $d^0(P + Q) =$

$*$ et si $d^0P = d^0Q$, alors $P + Q = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X \;\; \ldots \;\; + (a_n + b_n)X^n$ donc $d^0(P + Q)$

$\boxed{\text{Si } d^0P \neq d^0Q, \text{ alors } d^0(P + Q) = \max(d^0P, d^0Q). \quad \text{Cas général : } d^0(P+Q) \leqslant \qquad}$

Conséquence : $\mathbb{K}[X]$ est intègre, c'est à dire : $\boxed{\text{si } PQ = 0 \text{ alors} \qquad}$
Polynôme unitaire : son coefficient dominant vaut 1.
$\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n

Structure de $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$: espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. $\dim \mathbb{K}_n[X] =$

Une base de $\mathbb{K}_n[X]$: elle contient vecteurs.

Identification : 2 polynômes sont égaux si et seulement si leur coefficient de même rang sont égaux :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum_{k=0}^{r} b_kX^k \iff r = n \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k}$$ par "unicité des coordonnées de P".

Fonction polynômiale associée à $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$: $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}\ldots$
z (ou x) $\longmapsto a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$

Théorème de la division euclidienne :

$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ , } B \neq 0, \;\; \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ tel que } A = BQ + R, \text{ avec } \boxed{d^\circ R \qquad}}$

Soit $B \neq 0$. On dit que B divise A si : Notation : $B|A$

Propriété : Le reste de la division de P par $(X - \alpha)$ est :
démo :

Définition : $\boxed{\alpha \in \mathbb{K} \text{ est racine de } P \text{ si } P(\alpha) = 0}$.

Ppté : Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P alors on peut factoriser : $\exists Q(X) \in \mathbb{K}[X] \;/\; P(X) = \ldots$

Ppté : Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ p éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts.

$\boxed{\alpha_1, \cdots, \alpha_p \text{ sont racines de } P \text{ si et seulement si } \exists Q \in \mathbb{K}[X] \;/\; P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_p)Q}$