FORMULAIRE DL

Formule de TAYLOR-YOUNG : Soit f de classe C^n sur un intervalle I
Soit $(a,x) \in I^2$. On a alors, au voisinage de a :

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)}$$

DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS AU VOISINAGE DE 0

En ce début d'année, il ne vous sera demandé que les 3 premiers termes des D.L. car ils seront très utiles pour plusieurs chapitres à venir (le terme général sera utile plus tard au moment des séries entières)
Avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$
Vérifier que si $f(x) = a_0 + a_1 x + ...a_n x^n + o(x^n)$, alors $f(0) = a_0$.

Fonction	Développements limités
$e^x =$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\text{ch}x =$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\text{sh}x =$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x =$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sin x =$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\frac{1}{1-x} =$	$1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} =$	$1 - x + x^2 + \cdots\cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha =$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) =$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x) =$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\text{Arctan}\, x =$	$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$\tan x =$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Application : équivalent en 0 (premier terme non nul du D.L.) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ // $\cos x - 1 = ...$
$\underset{0}{\sim} ...$

Autres équivalents usuels : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} L$, d'où $\text{Arccos}\, x \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$ // $\text{Arctan}\, x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$

Par factorisation : $\text{ch}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ // $\text{sh}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ // $thx \underset{+\infty}{\sim} 1$

Un classique : $\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) \underset{1}{\sim} x - 1$