Intégrale sur un segment

I. Existence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$: a et b, 2 réels avec $a \leqslant b$

Définition d'une subdivision : On appelle subdivision du segment $[a, b]$, toute suite finie strictement croissante dont le premier terme est a et le dernier est b. C'est-à-dire la donnée de :
$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Définition $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ de $[a, b]$, telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$:
$*$ $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
$*$ f a une limite finie à droite et à gauche en tout point de la subdivision (seulement à droite en a et à gauche en b).

Remarque : Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

> Théorème : Si f est continue (par morceaux) sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ existe.

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique de la portion de plan située entre le graphe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

II. Positivité de l'intégrale :

Théorème : Si $a \leqslant b$, si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a, b]$, et si $\forall t \in [a, b], f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

conséquence : Si $a \leqslant b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$. (inégalité triangulaire)

Obtention d'équivalents par encadrement : f, g, h sont définies sur un intervalle I, et $a \in \bar{I}$.

> **si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$,** alors $g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$

Remarque : On a le même résultat pour les suites

Exercice n°1 : 1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$

2) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

III. Premières primitives :

> **Si** r...   , $\displaystyle\int_a^b u'(t)(u(t))^r \,\mathrm{d}t = ...$
>
> **Si** u **ne s'annule pas sur** $[a, b]$**,** $\displaystyle\int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)} \,\mathrm{d}t = ...$.
>
> **Plus généralement :** $\displaystyle\int_a^b u'(t)f'(u(t)) \,\mathrm{d}t = ...$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_a^b \sin \alpha t \,\mathrm{d}t = ...$ Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors $\displaystyle\int e^{\alpha x} \,\mathrm{d}x = ...$

Exercice n°2 : Calculer : 1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$, 2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x$, 3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{(\ln x)^3}{x} \,\mathrm{d}x$

Exercice n°3 : Calculer la primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui s'annule en 1.

IV. Intégration par parties :

Théorème : Si u et v sont C^1 sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

(ou $\displaystyle\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$)

démo : $\displaystyle\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$.

Formule de Taylor reste intégral : Si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, alors :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}$$

Démo : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

H_n :"Pour toute fonction f, C^{n+1} sur $[a,b]$, $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I_n$, où $I_n =$ "

La suite sur feuille

Inégalité de Taylor-Lagrange :

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et soit $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$\boxed{\left| f(b) - \left(f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M}$$

où $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| \text{ , } t \in [a,b]\}$ ou bien M majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $[a,b]$.

Démo : sur feuille

Pour $n = 0$, que retrouve-t-on ?

V. Méthode des rectangles : $a < b$

.

Définition : Soit f est continue sur $[a,b]$, et soit $(x_0, x_1, ..., x_n)$ la subdivision de $[a,b]$ de pas constant : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

On appelle sommes de Riemann de f sur $[a,b]$, les sommes suivantes :

pour $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$, et $S'_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$.

Représentation graphique :...

$$\boxed{\text{Théorème : Si } f \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur } [a,b] \text{, alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

cas particulier important : $a = 0$ et $b = 1$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } [0,1] \text{, alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice n°4 : Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

Exercice n°5 : Trouver un équivalent de $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + ... + \sqrt{\dfrac{n}{n}}$.

Exercice n°6 : Pour $\alpha \geq 0$, trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$