PROGRAMME DE COLLE N°3

SPE PSI

du 9 au 21 octobre 2023

Tout sur les Séries :

Convergence-Divergence d'une série. Somme partielle et somme d'une série.
$(\sum u_n)$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Réciproque FAUSSE (savoir citer la série harmonique).
Linéarité de la convergence et de la somme.("CV+CV=CV"...)

Série télescopique : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\Longleftrightarrow (u_n)_n$ converge.

Séries de référence : $*$ séries géométriques (+**dém**), $*$ séries de Riemann.

Séries à terme positifs : savoir que $(S_n)_n$ est croissante.
Règles de comparaison des séries à termes positifs :
$\leqslant$; O ; o (+ contraposés) ; $\sim$ (et DL quand l'équivalent n'est pas suffisant).

Convergence absolue : si une série est absolument convergente alors elle est convergente.
Exercice classique : $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)_n$ converge (puis développement asymptotique de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$). (+**dém**)
Formule de Stirling (admise)
Règle de d'Alembert.
Technique de comparaison série-intégrale dans le but d'encadrer des sommes partielles (ou des restes de séries convergentes). Par contre, le thm de comparaison Séries-Intégrale est H.P.
Exercice classique (séries de Bertrand : Hors Programme) :
Nature de $\sum \frac{1}{n(\ln n)}$ et équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ (+**dém**)

Règles de Riemann (à redémontrer à chaque fois), il faut savoir conclure dans les 2 cas suivants :
$*$ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$...
$*$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$...

Reste d'une série convergente, propriétés : $S_n + R_n = S$, et $\lim R_n = 0$ (+**dém**).

Théorème de convergence des séries alternées et encadrement de la somme.
Dans le cadre du thm, signe du reste et majoration de $|R_n|$.

Série exponentielle réelle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (+**dém**).

Définition de l'exponentielle complexe.

Produit de Cauchy de 2 séries absolument convergentes.
Application : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$(+**dém**).

Dénombrement : Le tout début, seulement le cours

Cardinal d'une réunion de 2 ensembles, d'un produit cartésien d'ensembles finis.
Nombre de p-uplets (ou p-listes) d'un ensemble à n éléments, nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, et nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
Si E et F sont finis, nombre d'applications de E dans F (+**dém** rapide)
Nombre de permutations d'un ensemble E (2 notions : une permutation est soit une n-liste d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, soit une bijection d'un ensemble à n éléments dans lui-même).