Séries de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

I. GENERALITES : (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition : La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_n$ avec $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$.

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_n$ converge.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée la ...

Si $(S_n)_n$ converge, alors la limite de $(S_n)_n$ est appelée...

On **note** cette limite : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$

Notation : La série de terme général u_n est aussi notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Rem 1 : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe signifie que $\sum u_n$ converge.

Rem 2 : si u_n est définie à partir de $n_0 > 0$, alors on définit $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et on note la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$

Exercice 1 : Technique à connaitre Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Attention : erreur classique. Vrai ou faux (faites la démo si c'est vrai, donnez un contre-exemple si c'est faux)

$(\sum u_n)$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$: VRAI - FAUX

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \sum u_n$ converge : VRAI - FAUX

On dit que $\sum u_n$ **diverge grossièrement** si ...

Exemple : $\sum(-1)^n$ diverge car...

Opération sur les séries :

$*$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge.

$*$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum \lambda u_n$ diverge.

$*$ Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Antipropriété : Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge alors ...

2 exemples : $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{2}{n}$ ...

$\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum -\frac{1}{n}$ diverge et

Théorème n°1, série télescopique : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\Longleftrightarrow (u_n)_n$ converge.

dém. à connaitre :

Séries complexes : si $u_n \in \mathbb{C}$, $[\sum u_n$ converge $\iff \sum \text{Re } u_n$ converge et $\sum \text{Im } u_n$ converge$]$.

Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re } u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Im } u_n$, donc ...

II. SERIES DE REFERENCE.

Série géométrique : $z \in \mathbb{C}$. $\sum z^n$ converge $\iff |z| < 1$. Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n =$

Exercice 2 : Montrer que $\displaystyle\sum \frac{e^{in}}{2^{2n}}$ est convergente et calculer sa somme.

Séries de Riemann : $(\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge $\iff \alpha > 1$

démo cas $\alpha \leqslant 0$:
cas général : plus tard

III. SERIES à TERMES POSITIFS : Théorèmes de comparaison : $\leqslant$; O ; o ; $\sim$.

n_0 est un entier fixé. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Théorème n°2 : Si pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$, alors $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante. (démo :

Conséquences : Si pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$, alors : $*$ $[\sum u_n$ converge $\iff (S_n)_n$ est majorée$]$.

$*$ [si $\sum u_n$ diverge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$].

Exe à connaitre : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ...$, car ...

Règle de comparaison n°1 : si pour $n \geqslant n_0$, on a : $\underline{0 \leqslant u_n} \leqslant v_n$, alors [si...
(et sa contraposée :

Définition : $\sum u_n$ est absolument convergente si

Théorème n°3 : Lien avec la convergence : si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors ...

Inégalité triangulaire :

Exercice 3 : Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge.

Règle de comparaison n°2 : si $*$ $(u_n)_n$ est une suite complexe,
$*$ $(v_n)_n$ est une suite réelle **positive** à partir d'un certain rang
$*$ $u_n = O(v_n)$,
alors si
(et sa contraposée
Remarque : on a le même théorème si $u_n = o(v_n)$ (en effet, si...
Règle des équivalents des séries à termes positifs (la plus utilisée) : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont 2 suites réelles. si $u_n \sim v_n$ et si $\underline{v_n \geqslant 0}$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 4 : Nature de $\displaystyle\sum \ln(2 - \frac{1}{n})$ et de $\displaystyle\sum \ln(1 - \frac{2}{n})$.
Exercice 5 : (constante d'Euler)

1) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. (Indication : utiliser $u_n = ...$)

2) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$.