DENOMBREMENT

1. **Soit E un ensemble non vide.**
   Compléter :
   $\mathcal{P}(E) =$ Rem : une partie de E est un sous-ensemble de E
   $E \backslash A = \overline{A} = \complement_E^A =$
   $A \backslash B =$

2. **Vocabulaire** :
   Soit $f : E \longmapsto F$ et $A \subset E$.
   La restriction de f à A notée f/A c'est l'application :

   La fonction $\mathbf{1}_A$ c'est l'application :

3. **Cardinal d'un ensemble fini**
   Définition : Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini s'il existe un entier n et une bijection de E dans $[\![1, n]\!](= \{1, 2, \ldots, n\})$: n est appelé le cardinal de E.
   On note alors Card$E = n$. Autre notation : $|E|$ ou $\#E$.
   convention : Card$\emptyset = 0$
   Propriété :
   Soient 2 ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, alors [f est bijective] si et seulement si [f est injective] si et seulement si [f est surjective].
   $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$
   Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.

   (a) Si $E \cap F = \emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : Card$(E \cup F)$ =Card$E$ + Card$F$.
   Généralisation : si $A_1, A_2, ..., A_p$ sont des parties de E, 2 à 2 disjointes, alors
   Card$(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p)$ =CardA_1 + CardA_2 + ...+ CardA_p.

   (b) $\boxed{\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}E + \text{Card}F - \text{Card}(E \cap F)}$.

   (c) **Définition** : $E \times F =$...

   $\boxed{\text{Card}(E \times F) = \text{Card}E \cdot \text{Card}F}$.
   Généralisation : si $E_1, E_2, ..., E_p$ sont des ensembles finis, alors
   Card$(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p)$ =CardE_1·CardE_2....·CardE_p

4. $\boxed{\text{p-listes}}$: les ensembles considérés sont tous finis.
   Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$.
   Définition : $\boxed{\text{Une } p\text{-liste de } E \text{ (ou un } p\text{-uplet) est un élément de } E^p}$.
   Exemple : si $E = \{x_1, x_2, ..., x_8\}$ alors (x_2, x_5, x_2, x_6) est une 4-liste de E.
   un 2-uplet est un un 3-uplet est un
   Théorème 1 :

   > Si Card$E = n$, le nombre de p-listes de E est n^p.
   > (pour être plus concret : combien de choix pour le 1er élément ? le 2ème ... ?)
   > **conséquence** : Si on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F, alors
   > $$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{Card}F)^{\text{Card}E}.$$

   démo de la csq : choisir une application de $E = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ dans $F = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, c'est choisir ...

Autre notation : $\mathcal{F}(E,F)$ est aussi notée F^E.

Théorème 2 :

Si Card$E = n$, et $p \leqslant n$ le nombre de p-listes d'éléments $\boxed{\text{distincts}}$ de E est :

$$n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

(combien de choix pour le 1er élément ? le 2ème ?)

On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de p éléments de E (H.P.).

conséquence :

Le nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments est si $p > n$

si $p \leqslant n$

Cas particulier :

Une permutation de n éléments est une bijection de l'ensemble de ces n éléments sur lui-même.

Le nombre de permutations de n éléments est $n!$

On dit aussi qu'une permutation de E, un ensemble à n éléments, est une n-liste d'éléments distincts de E : il y en a n !

5. $\boxed{\text{Combinaisons}}$:

(a) **définition** : une partie de E est un sous-ensemble de E.

Exemple : si $E = \{a_1, a_2, a_3\}$, combien y a-t-il de parties à 2 éléments ?

Théorème 3 :

Si Card$E = n$, le nombre de parties à p éléments (distincts) de E est noté $\binom{n}{p}$.

On appelle ce nombre coefficient binomial.

Si $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ et si $p > n$, $\binom{n}{p} = ...$

démo rapide : il y a $p!$ fois plus de p-listes d'éléments distincts dans E que de parties à p éléments, donc $A_n^p = p!\binom{n}{p}$.

Exercice 1 : 20 chevaux sont au départ d'une course.

Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

dans le désordre ?

(b) Calcul :

$$\text{si } p \geq 1, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

$\binom{n}{0} =$ $\quad\binom{n}{n} =$ $\quad\binom{n}{1} =$ $\quad\binom{n}{2} =$ $\quad\binom{n}{3} =$

Exo : Donner un équivalent de $\binom{n}{p}$ quand n tend vers $+\infty$

(c) Formules :

$\binom{n}{n-p} =$ $\qquad \binom{n}{p} = -\binom{n-1}{p-1}$

$\boxed{\text{Formule de Pascal : } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$.

DENOMBREMENT, fin

$\boxed{\text{Formule du binôme de Newton}}$ $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a^{n-k}$.

<u>conséquence</u> : Si $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E et si Card $E=n$, alors $\boxed{\text{Card } \mathcal{P}(E)=2^n}$.

<u>démo</u> : on note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E à p éléments, alors $\mathcal{P}(E)=$

RESUME

Dans les 3 cas, précisez s'il y a un ordre et s'il y a (ou non) répétition des éléments :

Le nombre de p-listes $(x_1,x_2,...,x_p)$ d'un ensemble à n éléments est n^p :

Le nombre de p-listes $(x_1,x_2,...,x_p)$ d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$:

Le nombre de parties $\{x_1,x_2,...,x_p\}$ à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{p}$:

<u>Csq importante</u> : Une urne contient n boules (sous-entendu, distinctes 2 à 2). On en tire k,

* simultanément : il y a tirages possibles.

* 1 à 1 sans remise : il y a tirages possibles.

* 1 à 1 avec remise : il y a tirages possibles.

(petit truc pour les tirages 1 à 1 : vérifier le nombre de choix pour les 2 premières boules).

<u>Exercice 2</u> : $\boxed{\text{Formule de Vandermonde}}$ Montrer que : $\forall (a,b,n)\in\mathbb{N}^3$, $\dbinom{a+b}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

<u>Exercice 3</u> : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $1\leqslant p\leqslant n$

$\boxed{\text{A savoir}}$:

Déterminer le nombre de p-uplets $(i_1,i_2,...,i_p)\in[\![1,n]\!]^p$ tels que $1\leqslant i_1<i_2<...<i_p\leqslant n$

<u>Pour retrouver rapidement</u> : un p-uplet dans un ordre strictement croissant correspond (de façon bijective) à une partie à p éléments.

<u>Conséquence 1</u> :

Déterminer le nombre de p-uplets $(i_1,i_2,...,i_p)\in[\![1,n]\!]^p$ tels que $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant...\leqslant i_p\leqslant n$

<u>Conséquence 2</u> :

Soit $S=\{(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tel que $x_1+\cdots+x_p=n\}$. Déterminer le cardinal de S.

(technique : on pourra représenter les entiers x_k par le nombre de batons correspondants).

En déduire le nombre de façons de ranger k boules indiscernables dans b boites discernables.