SOMMABILITÉ

I. Ensemble dénombrable

Définition : Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (c'est à dire s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E ou de E dans $\mathbb{N}$).

Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Conséquence immédiate :

E est dénombrable $\Longleftrightarrow$ E est de la forme $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont distincts

E est au plus dénombrable $\Longleftrightarrow$ E est de la forme $\{x_i / i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et où les x_i sont distincts.

Propriétés :

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables.

Tout produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Une réunion au plus dénombrables d'ensembles dénombrables est dénombrable.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démo : $*$ Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers négatifs, et les entiers impairs sont envoyés sur les entiers strictement positifs : $\phi : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \\ \end{cases}$ est une bijection.

$*$ A savoir : tout entier naturel non nul s'écrit de façon unique en produit d'un nombre impair et une puissance de 2, donc $\phi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \\ (p,q) \longmapsto 2^p(2q+1) - 1 \end{cases}$ est une bijection.

II. Famille sommable

En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$, et que pour tout découpage par paquets : $I = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, réunion disjointe alors on a :

$\displaystyle\sum_{i\in I} x_i =$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)}$

Définition : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$. Sinon, on notera $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.

En pratique, dans le cas positif, on peut découper, calculer et majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

Remarque : Cette définition suggère dès à présent que le calcul de $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ ne devrait pas dépendre de l'ordre dans lequel on choisit de sommer. La notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la théorie des séries indique au contraire qu'on somme les u_n dans l'ordre naturel : u_0, puis on ajoute u_1, puis u_2 etc...

Définition : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de complexes.

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** si $\displaystyle\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$, autrement dit, si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est **sommable**.

Théorème 1 : Cas des séries absolument convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$. On a :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable** $\iff$ la série $\sum u_n$ est **absolument** convergente.

Si c'est le cas, on a alors : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Conséquence :

Si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, et si la série $\sum u_n$ est **absolument** convergente alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème 2 : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de complexes, et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels.
Si $\forall i \in I,\ |x_i| \leq y_i$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

Propriétés des familles sommables dans $[0,+\infty]$: I et J sont des ensembles au plus dénombrables.

Soient $(x_i)_{i\in I}\,, (y_i)_{i\in I}, (u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ des familles d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

* croissance dans $\mathbb{R}$: Si $x_i \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$ alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ dans $[0,+\infty]$.
* Linéarité : $\displaystyle\sum_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.
* Sommation par paquets : Si $I = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$
* Théorème de Fubini : $\boxed{\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{ij}}$.

En particulier, si l'une des sommes est finie (famille sommable), l'autre aussi et elles sont égales.

* Familles produits : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \sum_{i\in I} x_i \times \sum_{j\in J} y_j$.

Propriétés des familles sommables dans $\mathbb{K}$: à part la croissance, ce sont les mêmes propriétés, mais il faut ajouter les hypothèses de sommabilité.

Par exemple, pour les familles produits, il faut commencer par : Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in I}$ sont sommables, alors $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \sum_{i\in I} x_i \times \sum_{j\in J} y_j$, que l'on peut noter $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j$.

Exo : calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$ d'après le thm de Fubini avec $I = J = [\![2,+\infty[\![$ car...

$S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$, en remarquant que $n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$