PROGRAMME DE COLLE N°4

SPE PSI

du 6 au 17 novembre 2023

Dénombrement :

Cardinal d'une réunion, d'un produit cartésien d'ensembles finis.
Nombre de p-uplets (ou p-listes) d'un ensemble à n éléments, nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, et nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
Si E et F sont finis, nombre d'applications de E dans F, nombre de permutations d'un ensemble E.
Coefficient binomiaux : notation $\binom{n}{k}$, formule de Pascal, formule du binôme, card$P(E)$(+**dém**).
2 exercices à retrouver rapidement (connaitre le résultat du 1er exo) :
le nombre de p-uplets de $[\![1, n]\!]$ dans un ordre strictement croissant ou dans un ordre croissant.

Proba :

Ensemble dénombrable. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$, le produit cartésien d'ensembles dénombrables et une réunion au plus dénombrables d'ensembles dénombrables est dénombrable.
Révision : complémentaire d'une union ou d'une intersection, distributivité entre $\cup$ et $\cap$.
Correspondance entre langage probabiliste et langage ensembliste. Exe : $(A \Longrightarrow B)$ et $(A \subset B)$ sont équivalents, selon qu'on voit des évènements ou des ensembles.
Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ (où $\mathcal{A}$ est une tribu).
Définition d'une proba.
Propriétés : **si $A \subset B$**, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, continuité croissante (+**dém faculatitive**) et continuité décroissante,
sous-additivité
Définition de 2 évènements indépendants
Définition de $P(A/B)$, noté aussi $P_B(A)$. Ppté : P_B est une proba. Ppté des évènements indépendants.
Formule des proba composées.
Formule des proba totales sous 2 formes (convention : $P(A_n)P(B/A_n) = 0$ si $P(A_n)$=0).
Cas particuliers : si A est un événement, $(A, \bar{A})$ est un s.c.e
Formule de Bayes : $P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}P(B/A)$ (à laquelle on peut appliquer la FPT au dénominateur).

Variables aléatoires discrètes :

Définition théorique (X est une application de Ω dans E), mais dans la pratique, on pourra utiliser X comme un réel.
Loi de probabilité d'une v.a. : la donnée de $X(\Omega)$, et de $P(X = x_n)$, pour tout $x_n \in X(\Omega)$.
Si X et Y sont indépendantes, alors toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y.
A savoir : $[\max\,(X, Y) \leqslant x \Longleftrightarrow X \leqslant x$ et $Y \leqslant x]$, $[\min\,(X, Y) \geqslant x \Longleftrightarrow X \geqslant x$ et $Y \geqslant x]$
et si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors $P(X = Y) = P(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = k)))$ réunion d'événements incompatibles (on acceptera de dire aussi que des évènements sont disjoints)
Les lois classiques :
Connaitre les **modèles**, et les définitions ($X(\Omega)$ et $P(X = k)$), de la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, de Bernoulli, binomiale, et géométrique + Ppté : $P(X > k) = (1 - p)^k$. Définition de la loi de Poisson.

Espérance et variance.

Ppté : si X a une espérance et si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$ (+**dém** en appliquant rigoureusement le thm de Fubini à l'aide d'une suite prenant des valeurs nulles).
Pptés de l'espérance : linéarité, positivité.
Thm de transfert. csq : calcul de $E(X^2)$.
ppté : si X^2 est d'espérance finie alors X aussi. (+**dém** en apportant le plus grand soin aux séries)
Variance, écart-type. Formule de König-Huyghens. $V(aX + b)$(+**dém**).
Variance d'une somme de v.a. indépendantes 2 à 2
Espérance et variance de toutes les lois classiques (+**2 dém** du calcul d'espérance d'une loi binomiale).
Exo classique :
Si $X \hookrightarrow B(n, p_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (+**dém**)