PROGRAMME DE COLLE N°6, spé PSI

du 4 au 15 décembre 2023

FIN DES POLYNÔMES : avec le programme de colle précédent

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.

ESPACES VECTORIELS :

Groupe, espaces Vectoriels, sous-espace-vectoriels. Si F et G sont des sev alors $F \cap G$ aussi.
Familles libres, génératrices, bases. Sous-espaces vectoriels engendrés.
Dans E, $\text{Vect}(u_1, ..., u_p)$ est le plus petit s.e.v. de E qui contient $(u_1, ..., u_p)$.

3 exos classiques : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(2) = 0\}$ et $H = \{(u_n)_{n\geqslant 0}$ suites réelles telles que $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n\}$.
Montrer que ce sont des e.v. sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base.(**+dém de l'un des 3**)

Théorème de la base incomplète, dimension, cardinal d'une famille libre, et d'une famille génératrice de E.

Somme de p s.e.v. de E : c'est un s.e.v. de E
Somme directe, caractérisation dans le cas de 2 s.e.v.
Supplémentaires, caractérisation (avec des bases et avec la dimension).
Existence d'un supplémentaire en dimension finie (**+dém**).

APPLICATIONS LINÉAIRES :
Propriété : $f(0) = 0$. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, Ker f est un s.e.v. de E et Im f est un s.e.v. de F.
Caractérisation : f est injective $\Longleftrightarrow$ Ker $f = \{0\}$ (**+dém**).
Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\text{Im} f = \text{Vect}((f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$

Une application linéaire est un isomorphisme ssi l'image d'une base (de E) est une base (de F).
Un isomorphisme "conserve les dimensions".

RANG :
Définition et calcul du rang d'une famille de vecteurs.
Théorème du rang.
Conséquence : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F de même dimension, alors
[f est injective $\Longleftrightarrow$ f est bijective $\Longleftrightarrow$ f est surjective] (**+dém, en partie orale**)

Polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de $\mathbb{K}$, $(x_0, x_1, ..., x_n)$:
il existe une unique famille $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(x_i) = 1$ (**+dém** à l'aide d'un isomorphisme).

Expression des polynômes $L_i(X)$ (**+dém**)

$(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k$.(**+dém**)

Conséquence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$