PROGRAMME DE COLLE N°7

SPE PSI

du 8 au 20 janvier 2024

BONNE ANNÉE 2024 A TOUS

Remarque : certaines démo sont rapides, mais on pourra aussi vous demander des définitions et propriétés.

Projecteur sur F parallèlement à G.
Pptés : $p \in \mathcal{L}(E), p \circ p = p$, Ker $p = G$ et Im$p = F = \{x \in E$ tel que $p(x) = x\}$,
symétrie par rapport à F parallèlement à G ($s = 2p - Id$).
Caractérisation : Si $p \in \mathcal{L}(E)$ alors [p est un projecteur $\Longleftrightarrow p \circ p = p$](+**dém** de la réciproque : technique de l'analyse-synthèse)
Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.
Stabilité de Im f et Ker f par g si $f \circ g = g \circ f$ (+**dém**).
Hyperplan en dimension finie(=noyau d'une forme linéaire non nulle).
Caractérisation : dim $H = n - 1$ ou $\exists D$, une droite vectorielle telle que $E = H \oplus D$.
Si un hyperplan H=Ker ϕ, alors H =Ker $\psi \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}-\{0\}$ tel que $\psi = \alpha\phi$.
Exo classique : Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H un s.e.v. de E et $\tilde{f}$ la restriction de f à H.
Déteminer Ker $\tilde{f}$ et en déduire rg $\tilde{f}$ (en fonction de H et f).(+**dém**).

MATRICES :

Produit de 2 matrices : formule et calcul pratique.
Matrices élémentaires $E_{k,l}$: base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Calcul de $E_{k,l} \times E_{k',l'}$
Matrices symétriques, antisymétriques, transposée (rg(M)= rg (M^T), $(AB)^T = B^T A^T$...).
Formule du binôme **si** $AB = BA$.
On peut avoir $AB = (0)$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ (+**contre-exemple à connaitre**)
Une application linéaire est déterminée de manière unique par la donnée de l'image d'une base.
Matrice d'une application linéaire : rg (f)=rg ($\mathrm{M}_B(f)$)
Matrice de passage. Pass(B', B) =(Pass(B, B'))$^{-1}$.
Formules de changement de bases, pour un vecteur : $X_1 = PX_2$.
et pour un endomorphisme : $A_1 = PA_2P^{-1}$. Matrices semblables.
Exo classique : f et g 2 endomorphismes d'un e.v. de dim finie, si $f \circ g = id$ (ou $g \circ f = id$) alors f est bijective (+**dém**).
Csq : si $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) alors A est inversible et $B = A^{-1}$
Matrice inversible et calcul de l'inverse. (cas d'une matrice 2x2, diagonale...)
Définition de la trace d'une matrice.
tr(AB)=tr(BA) et conséquence : 2 matrices semblables ont même trace(+**dém** des 2 résultats).
Définition de la trace d'un endomorphisme (=tr($M_b(f)$) est indépendant de la base b).
Trace d'un projecteur = son rang. (+**dém**).
Produit par blocs. Matrice d'un endomorphisme f dans une base adaptée à F, un s.e.v. stable par f.

DETERMINANTS

Le déterminant est l'unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :
i. f est **linéaire par rapport à chacune des colonnes** de sa variable A.
ii. f est **antisymétrique** par rapport à chacune des colonnes de sa variable A
iii. $f(I_n) = 1$.

Propriétés : Si 2 colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$, échange de 2 colonnes,
on peut effectuer la transformation $C_i \longleftarrow C_i + \beta C_j, (i \neq j)$ sans changer le déterminant,
dét $(\alpha.A)$, $\det(AB), \det(A^{-1}), \det({}^tA)$ (mêmes propriétés sur les lignes que sur les colonnes).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs .
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, caractérisation d'une base de E
Déterminant d'un endomorphisme.

Développement d'un déterminant suivant une ligne, ou une colonne.
Théorème : Déterminant de Vandermonde (+**dém** qui utilise une variable x)

REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES, début

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.
Valeurs propres, spectre, vecteurs propres, sous espaces propres d'un endomorphisme...
Théorème fondamental : les sous-espaces propres de f sont en somme directe (+**dém**).
Si $f \circ g = g \circ f$, alors les s.e.p. de f sont stables par g
Si $f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x}$ alors $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(f)(\vec{x}) = P(\lambda).\vec{x}$, donc si P est un polynôme annulateur de f, alors $\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } P\}$ (+**dém** des 2 résultats)
Polynôme caractéristique d'une matrice : pour $x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
$\chi_A(x) = x^n - tr(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$. De même pour un endomorphisme.
Sp $(A) = \{\text{racines de } \chi_A\}$.
Valeurs propres d'une matrice triangulaire.
Thm de Cayley-Hamilton. (Ne pas confondre **un** polynôme annulateur et **le** polynôme caractéristique)
exo classique : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $\exists p \geqslant 1$ tel que $A^p = (0)$, alors déterminer $\chi_A(X)$ et montrer que A^n=(0). (+**dém**)

Invariants de similitude (polynôme caractéristique, spectre, tr, dét, et rang)
Définition de A est diagonalisable, de f est diagonalisable + ppté caractéristique (base de vecteurs propres).