PROGRAMME DE COLLE N°8

SPE PSI

du 22 au 2 février 2024

REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES, tout le chapitre

Les définitions et théorèmes de la colle précédente.

Théorème de diagonalisation n°1 : f est diagonalisable $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f) \Leftrightarrow \dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(f)$.

Thm de diagonalisation n°1' : A est diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) =$ordre (A).

Ppté : $1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant$ l'ordre de multiplicité de λ(+**dém**). Cas d'une racine simple.

Théorème de diagonalisation n°2 :
f est diagonalisable $\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé et $\forall\lambda \in$Sp(f), $\dim E_\lambda(f)$= l'ordre de multiplicité de λ.

Condition **suffisante de diagonalisation** :
Si f admet n valeurs propres distinctes **alors** f est diagonalisable.
De même : **Si** χ_f est scindé à racines simples **alors** f est diagonalisable.
Dans ces 2 cas, les s.e.p. sont de dimension 1.

Théorème de diagonalisation n°3 : f est diag^{ble} $\Leftrightarrow \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de f
$\Leftrightarrow f$ s'annule sur un polynôme scindé et n'ayant que des racines simples.

Mêmes thms pour des matrices.
Conséquence : Si f est diagonalisable alors tout endomorphisme f_1 induit sur un sous-espace vectoriel stable par f est diagonalisable et χ_{f_1} divise χ_f(+**dém**).

Cas d'une matrice A n'ayant qu'une seule valeur propre : savoir rapidement montrer
qu'elle est diagonalisable ssi $A = \lambda I_n$.

Définition de A est trigonalisable, et de f est trigonalisable.
E étant un $\mathbb{K}$ e.v., $\boxed{f \text{ est trigonalisable} \Longleftrightarrow \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$ (et on connait la diagonale de T)
Même thm pour $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{K}$.
Si χ_A est scindé, expression de la trace de f et du déterminant de f en fonction des valeurs propres.
A part dans les cas simples , les trigonalisations devront être guidées.

Applications de la diagonalisation : Calcul de A^k pour $k \in \mathbb{N}$, (où $\mathbb{Z}$ si A est inversible),
+2 autres méthodes pour $k \in \mathbb{N}$: division de X^n par un polynôme annulateur de A, et
$A = \lambda I_n + B$ où B^k est connu + binôme de Newton en précisant que les 2 matrices commutent.

Suites récurrentes linéaires d'ordre p (avec une aide si nécessaire pour les notations de X_n, mais les élèves doivent trouver A telle que $X_{n+1} = AX_n$).

INTEGRALES SUR UN SEGMENT

Théorème fondamental : primitive d'une fonction continue sur un intervalle I (: $\int_a^x f(t)dt$ où $a \in I$).

Conséquence : savoir retrouver la dérivée de $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ quand f C^0, u et v C^1 sur $\mathbb{R}$.

Intégration par parties.

exo classique, Intégrales de Wallis : **IPP** pour écrire I_n en fonction de I_{n-2} , montrer que $(I_n)_n$ est décroissante et retrouver l'écriture de I_{2p+1} à l'aide de factoriel (+**dém** des 3 résultats).

exo classique, lemme de Lebesgue :

Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$ $(a < b)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$ (+**dém**).
Changement de variable : on donnera en général le changement de var à effectuer.
2 changements de variable classiques : $t = \cos x$ s'il y a $\sqrt{1-t^2}$ dans l'intégrale, et
$t = \tan(\frac{x}{2})$ pour des fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.
Savoir calculer $\displaystyle\int \frac{(\alpha x + \beta)}{x^2 + ax + b}\,\mathrm{d}x$. Mise sous forme canonique et décomposition en éléments simples pour le calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + ax + b}$.
Revoir les primitives des fonctions usuelles ($\displaystyle\int u'(t)u(t)^r\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int \cos k\theta d\theta$, $\displaystyle\int (\sin t)e^{at}\,\mathrm{d}t$, $\int P(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+c^2}$...) et donc aussi les dérivées : tan (sous 2 formes), arctan, arcsin et arccos.