PROGRAMME DE COLLE N°9

SPE PSI

du 5 au 16 février 2024

Avant les démonstrations, les élèves doivent connaitre parfaitement le cours

$\boxed{\text{Intégrales généralisées}}$:

Définition.Cas des fonctions prolongeables par continuité.
Relation de Chasles, linéarité, positivité, cas complexe.
Intégrales impropres aux 2 bornes
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{(-\alpha t)}dt$ (si $\alpha > 0$)(+**<u>dém</u>** pour les 2 intégrales) et
Intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$(+**<u>dém</u>, seulement pour la 2ème**) et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$

Règles de comparaison $\leqslant$.
CV absolue et intégrabilité : ACV $\Rightarrow$ CV
Règles de comparaison $\leqslant$, O et o, et équivalent, du point de vue de l' intégrabilité.
IPP sur $]a,b[$: il faut préciser que u et v sont C^1 sur $]a,b[$, puis que uv a une limite finie en b et en a, alors $\displaystyle\int_a^b u'v$ est de même nature que $\displaystyle\int_a^b uv'$ (si u et v sont C^1 $[a,b[$, on ne détermine que la limite de uv en b)
Technique à connaitre pour montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente (+**<u>dém</u> directe ou par une IPP sur** $[1,x]$)

Changement de variable C^1, bijectif, strictement monotone : ne change pas la nature d'une intégrale (mais on applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variables usuels.)
Cas des fonctions paires et impaires, (csq : $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{(-t)^\alpha}$ CV $\iff \alpha > 1$)

Règles de Riemann (en $+\infty$: s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$... ou si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$.... De même en 0)
<u>Exo classiques</u> : (dans la feuille "résumé")
Nature de 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)\ln x}{x}dx$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ et 4) $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^a dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$. (+**<u>dém</u>** d'une des 4)

$\boxed{\text{Thèorème de convergence dominée}}$.
Conséquence : Thèorème de convergence dominée à paramètre continu (+**<u>dém</u>**)
Cas des suites de fonctions définies sur un intervalle $[0,n]$, nulle si $t > n$. (avec aide si nécessaire).

$\boxed{\text{Thèorème d'intégration terme à terme}}$. Savoir utiliser sans indicaton que $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ si $|u| < 1$

Intégrale dépendant d'un paramètre : les thms sont donnés directement avec la domination locale.
$\boxed{\text{thm de continuité sous l'intégrale}}$

$\boxed{\text{thm de dérivation sous l'intégrale}}$ + cas C^∞ et cas C^n si le reste est au point.

<u>Exercice très classique</u> : La fonction Gamma : si nécessaire, les professeurs peuvent redonner $\Gamma(x)$.
Domaine de définition et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)(+**<u>dém</u> des 2 résultats**).
Γ est C^1 sur $]0,+\infty[$ (+**<u>dém facultative</u>**)