PROGRAMME DE COLLE N°10

SPE PSI

du 19 au 23 février puis du 18 au 22 mars 2024

Avant de connaitre les démonstrations, les élèves doivent connaitre parfaitement les résultats du cours : merci aux professeurs de demander en plus d'une démonstration, un des 7 thm encadrés ou les définitions des différentes convergences.
Les thms du chapitre précédent pourront également être utilisés dans un 2ème temps (CV dominée, intégration terme à terme...), ou même l'étude d'intégrales généralisées.

Attention : en raison du concours blanc, il n'y aura pas de colles la semaine de la rentrée. Les 2 semaines de colles sont donc très espacées.

Suites et Séries de fonctions :

Convergence simple, et uniforme pour les **suites** de fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans la pratique : si $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ indépendant de x, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors écrire l'étape : $0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \alpha_n$ avant de conclure grace au thm d'encadrement.
Technique vue : utilisation d'une suite $(x_n)_n$ qui vérifie : "$f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0" pour montrer la non CVU.
Théorèmes de transfert de continuité, d'intégration **sur un segment** et de dérivation (+**dém** de ce dernier thm), généralisation à des fonctions de classe C^k et C^∞.
(le thm de la double limite pour une suite de fonctions est hors programme).

Convergence d'une **série** de fonctions : convergence simple (déf théorique avec $(S_n)_n$ et) définition pratique : $\forall x \in I,\ \sum f_n(x)$ CV.
Convergence uniforme (déf théorique et déf pratique) : $\sum f_n$ CVS sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,I} = 0$.
Convergence normale d'une série de fonctions.

Petite Propriété (pas obligatoire) : si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\quad |f_n(x)| \leq \alpha_n$ indépendant de x, et si $\sum \alpha_n$ converge, alors $\sum f_n$ converge normalement sur I.
Lien entre ces convergences, en particulier : CVN $\Longrightarrow$CVU(+**dém**).

Théorèmes de transfert de continuité, d'intégration terme à terme **sur un segment**, de dérivation terme à terme sur un intervalle et de la double limite.
Généralisation à des fonctions de classe C^k et C^∞.

Domaine de définition de ζ, ζ est C^0 sur $]1,+\infty[$ et limite en $+\infty$ (+**dém** des 3 résultats).
ζ est C^1 sur $]1,+\infty[$ (+**dém**)

Remarque : les élèves sont censés savoir que dans un exercice "classique", on essaie en premier de montrer que la série CVN, sinon on essaie de montrer que la série CVU : surtout si on est dans les conditions du TSA, car on connait une majoration de $|R_n(x)|$ (puis on majore ...$\|R_n\|_{\infty,I}$).

Révision : Produit scalaire :
Définition d'un produit scalaire, $\|u+v\|^2$, $\|u-v\|^2$. Identité de polarisation.
Inégalité de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité). Théorème de Pythagore.
Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et produit scalaire de référence sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$: $\displaystyle\int_a^b fg$.
Orthogonalité.
Base orthonormée, si $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une BON de E, coordonnées d'un vecteur :
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$, et expression du produit scalaire (+**dém** des 2 résultats).
$F \subset (F^\perp)^\perp$.
Des s.e.v. orthogonaux 2 à 2 sont en somme directe.
Si $E = F \oplus G$, et si $F \perp G$, alors $G = F^\perp$ (+**dém**)
Procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Existence d'une BON pour un e.v. de dimension finie.
Les projecteurs orthogonaux ne sont pas encore dans ce programme de colle.