COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
Soient X et Y 2 v.a.d. telles que $X(\Omega) = \{x_i\ ,\ i \in I\}\ ,\ Y(\Omega) = \{y_j\ ,\ j \in J\}\ ,\ \ I \subset \mathbb{N}$ et $J \subset \mathbb{N}$

Définition :
On appelle **loi conjointe** de X et Y ou loi du couple (X, Y), la donnée de
$*$ $(X, Y)(\Omega)$ (ou de $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$),
$*$ et $P((X, Y) = (x_i, y_j))$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$.

Remarque : $[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]_{(i,j)\in I\times J}$ est un système complet d'évènements.

Propriété : Soit $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une suite de réels.
$(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires $\Longleftrightarrow$

$$\forall (i,j) \in I \times J\ ,\ p_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1.$$

Théorème de transfert appliqué à un couple de v.a.d. (admis)
Un couple de v.a.d. (X, Y) peut être vu comme une v.a.d. $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

Si f est une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors :
$f(X, Y)$ admet une espérance finie $\Longleftrightarrow (f(z)P(Z = z))_{z\in Z(\Omega}$ est sommable, et dans ce cas :
On a donc $E(f(X,Y)) = \displaystyle\sum_{z\in Z(\Omega)} f(z)P(Z = z) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} f(x,y)P(X = x \text{ et } Y = y)$.

Csq : $\boxed{E(XY) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xyP(X = x \text{ et } Y = y)}$ (en posant $f(x,y) = xy$)

Exercice :
Si $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2, P(X = i \text{ et } Y = j) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, calculer $E(2^{X+Y})$.

Propriété : Si $|X| \leqslant Y$ et si $E(Y) < +\infty$ alors $E(X) < +\infty$
Conséquence : Si $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$ alors $E(XY) < +\infty$.

Définition :

On peut déterminer la loi de X à partir de la loi conjointe de X et Y :
on applique la formule des proba totales avec le SCE : $(Y = y_j)_{j\in J}$, et on obtient :

$\forall i \in I, P(X = x_i) = ...$

La loi de X ainsi déterminée, s'appelle **la première loi marginale** du couple (X, Y).

De même pour la 2ème loi marginale, $\forall j \in J, P(Y = y_j) = ...$

Exemple : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement deux boules de cette urne. Nous envisagerons les deux modèles de tirage : avec ou sans remise. Nous noterons dans les deux cas : X, la **VAD** prenant la valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon. Nous définirons de même la **VAD** : Y, concernant le tirage de la deuxième boule.

a) **Avec remise**

$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$			
$X = 1$			
Loi de Y			

b) **Sans remise**

$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	Loi de X
$X = 0$			
$X = 1$			
Loi de Y			

Nous constatons sur cet exemple que les lois marginales sont les **mêmes** pour les deux tirages, alors que les lois conjointes sont **différentes**.

Définition :

Soit $y_j \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y_j) \neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle** de X sachant $(Y = y_j)$, la loi de X sachant $Y = y_j$ définie par :
$\forall i \in I, \quad P(X = x_i / Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$

Définition :

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
$*$ On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **deux à deux** indépendantes lorsque :
pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, les **v.a.d.**, X_i et X_j sont indépendantes.
$*$ On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall J \subset [\![1, n]\!], \quad P(\bigcap_{i \in J} X_i = x_i) = \prod_{i \in J} P(X_i = x_i).$$

Conséquence : Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont 2 à 2 indépendantes.

Proposition (Lemme des coalitions) :

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires discrètes **mutuellement** indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $m \in [\![1, n]\!]$.
Soit f et g définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et sur $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont des **v.a.d.** indépendantes.

Exe : si X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, alors $X_1^2 + 2X_3$ et X_2 sont indépendantes.

Thm-Définition : Soient X et Y , deux **v.a.d.** possédant un moment d'ordre 2,
alors la variable $(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))$ admet une espérance **finie**, et on définit la **covariance** de X et Y, par $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[\ (X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))\ ]$. (Elle représente la corrélation entre X et Y)

Remarque : $\mathbf{Cov}(X, X) = ...$

Propriété : sous les mêmes conditions, $\boxed{\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y).}$

Csq : $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont deux } \textbf{v.a.d. indépendantes}\text{, alors on a : } \quad \mathbf{Cov}(X, Y) = 0}$.
Remarque : Attention la réciproque est fausse !
Propriétés : Toutes les **v.a.d.** admettent un moment d'ordre 2 (: $E(X^2) < +\infty$).
$*$ $\mathbf{Cov}(Y, X) = \mathbf{Cov}(X, Y)$.
$*$ $\mathbf{Cov}(aX + bX' \ , \ cY + dY') = ac \ \mathbf{Cov}(X, Y) + ad \ \mathbf{Cov}(...$
$*$ $\mathbf{Cov}(aX + b \ , \ cY + d) = ac \ \mathbf{Cov}(X, Y)$.
$*$ $\boxed{\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + V(Y) + 2 \ \mathbf{Cov}(X, Y)}$.
Plus généralement, $\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}(X_n) \ + \ 2 \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{Cov}(X_i \ , \ X_j)$

Csq : si $X_1, \dots, X_n$ sont des **v.a.d.** **2 à 2 indépendantes** alors
$\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}(X_n)$.
Propriété :
Si $X \geqslant 0$ et si $E(X) = 0$ alors $X = 0$ est un événement presque sûr, c'est à dire : $P(X = 0) = 1$.

Proposition : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soient X et Y, deux **v.a.d.** qui admettent un moment d'ordre 2, alors $\boxed{E(XY)^2 \leqslant E(X^2) \cdot E(Y^2)}$.