PRINCIPALES DEFINITIONS SUR LES FONCTIONS REELLES

I Points spéciaux d'une partie de $\mathbb{R}$

1. **Point adhérent** : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
   On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un point adhérent de A si $\boxed{\forall r > 0,\ A \cap [\alpha - r, \alpha + r] \neq \emptyset.}$
2. **Point intérieur** : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
   On dit que $a \in A$ est un point intérieur à A si $\boxed{\exists r > 0 \text{ tel que } [a - r, a + r] \subset A.}$

II Vocabulaire des fonctions réelles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle de I dans $\mathbb{R}$.

1. **Fonction majorée** : f est dite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$.
2. **Fonction minorée** : f est dite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$.
3. **Fonction bornée** : f est dite bornée si f est majorée et minorée ou si
   $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$.
4. **Fonction croissante** : f est dite croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$.
5. **Fonction décroissante** : f est dite décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$.
6. **Fonction monotone** : f est dite monotone sur I si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I.
7. **Fonction strictement croissante** : f est dite strictement croissante sur I si
   $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$.
8. **Fonction strictement décroissante** : f est dite strictement décroissante sur I si
   $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$.
9. **Fonction strictement monotone** : f est dite strictement monotone sur I si f est strictement croissante sur I ou si f est strictement décroissante sur I.
10. **Subdivision** : On appelle subdivision du segment $[a, b]$, toute suite finie strictement croissante dont le premier terme est a et le dernier est b. C'est-à-dire la donnée de :
    $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.
11. **Fonction en escalier** : f est dite en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision
    $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.
12. **Fonction lipschitzienne** : f est dite lipschitzienne sur I si :
    $\exists k \geqslant 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
13. **Fonction contractante : HP** : f est dite contractante sur I si :
    f est k-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$.
14. **Fonction périodique** : f est dite périodique sur $\mathbb{R}$ si :
    $\exists\ T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + T) = f(x)$.
15. **Extremuns** :
    Soit a un point de I.
    On dit que f admet un maximun global en a si : $\forall x \in I\ ,\ f(x) \leqslant f(a)$.
    On dit que f admet un minimun global en a si : $\forall x \in I\ ,\ f(x) \geqslant f(a)$.
    On dit que f admet un maximun local en a si : $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - r, a + r]\ ,\ f(x) \leqslant f(a)$.
    On dit que f admet un minimun local en a si : $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - r, a + r]\ ,\ f(x) \geqslant f(a)$.

16. **Limite finie en $a \in \mathbb{R}$** : Soit a un point adhérent à I et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers L en a ou que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a et l'on note $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

17. $\boxed{\text{Fonction continue en } a \in I}$:
f, définie sur I est dite continue en $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.
C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

18. **Fonction continue sur I** : f est dite continue sur I si f est continue en chaque point de I.
19. **Fonction continue à droite en a** : f est dite continue à droite en $a \in I$ si $\lim_{x \stackrel{>}{\to} a} f(x) = f(a)$.

20. **Fonction continue à gauche en a** : f est dite continue à gauche en $a \in I$ si $\lim_{x \stackrel{<}{\to} a} f(x) = f(a)$.

21. **Prolongement par continuité** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est définie sur I sauf en a (:$f(a)$ n'existe donc pas encore!!!), alors on dit que f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie en a.
Le prolongement de f par continuité est la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$ si $x \in I - \{a\}$
$$g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$$
(g est définie sur I alors que f n'est définie que sur $I - \{a\}$, mais en général, la fonction g est toujours notée f : "on pose $f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$").
22. **Fonction continue par morceaux** : f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit continue sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et que f admette une limite à gauche et à droite pour les points x_i avec $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
23. **Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$** : Soit a un point adhérent à I. On dit que f diverge vers $+\infty$ en a ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et l'on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si :
$\forall A > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A$.
On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a.
24. **Limite finie en $+\infty$** : Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers L en $+\infty$ ou que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tel que $\forall x \in I$, $x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.
On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$.
25. **Limite infinie en $+\infty$** : On dit que f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si :
$\forall A > 0$, $\exists B > 0$ tel que $\forall x \in I$, $x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$.
On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$.

26. **Limite à gauche, à droite** : Soit a un point adhérent à I et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers L en a **à gauche** ou que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a **à gauche** et l'on note $\lim_{x \stackrel{<}{\to} a} f(x) = L$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leqslant \alpha$ et $x < a \Longrightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.
Ecrire les notions de limite en $\pm\infty$ et de limite infinie à gauche et à droite.
27. Soit $n \geq 1$. f est n fois dérivable sur I, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I et on a : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
Propriété immédiate : on a aussi $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
28. **Fonction de classe C^1 , C^n , C^∞** :
f est de classe C^1 sur I si f est
f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur I.
Rem : f est de classe C^0 sur $I \Leftrightarrow f$ est continue sur I.
On dit qu'une fonction f est de classe C^∞ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I (ou si pour tout n, f est de classe C^n sur I).

29. $\boxed{\text{fonction convexe}}$: On dit que la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** sur I si :
$\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$: $f\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
A savoir : * I est un intervalle $\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in I^2$ tel que $x < y$, $[x,y] \subset I$.
* $t \longmapsto (1-t)x + ty$ parcourt le segment $[x,y]$ quand t parcourt [0,1].
(étudier la fonction définie par $h(t) = (1-t)x + ty$ pour $t \in [0,1]$)
Interprétation géométrique : sur feuille. On a donc :

30. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I alors la courbe de f est sous ses cordes : soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$, alors la courbe de f est sous la droite passant par $A(x, f(x))$ et $B(y, f(y))$

Si de plus, f est dérivable alors la courbe de f est au dessus de ses tangentes (: si T est une tangente à C_f en $x_0 \in I$, alors la courbe de f est au dessus de T)
Définition :
on dit que f est concave si : $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$: $f\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS REELLES

31. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
démo :

32. **Théorème de la limite monotone** : (faire un dessin pour chacun des cas!)
* si f est croissante, majorée sur $]a,b[$, alors f a une limite finie ....
(si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$)
* si f est croissante, minorée sur $]a,b[$, alors f a une limite finie ...
* si f est décroissante, minorée sur $]a,b[$, alors f a une limite finie ....
* si f est décroissante, majorée sur $]a,b[$, alors f a une limite finie ....

33. Théorème d'encadrement : Soit a un point adhérent à I ($a \in I$ ou a est une extrémité de I). Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.
34. Critère séquentiel : Soit a un point adhérent à I
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow$ ...

Exercice1 : Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall p \in \mathbb{Z}$ et $\forall q \in \mathbb{N}^*$: $f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{q^2}{p^2 + q^2}$.
Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

35. $\boxed{\text{Théorème des valeurs intermédiaires}}$:
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur l'intervalle I.
$\forall (a,b) \in I^2, f$ atteint toute valeur γ entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire : Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
Conséquence 1 : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Conséquence 2 : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment :
c'est à dire : $f([a,b]) = [c,d]$ donc $c \in f([a,b])$ donc ....

Conséquence 3 : Toute fonction continue sur un segment ...

36. $\boxed{\text{Théorème de la bijection}}$ (ou corollaire du thm des valeurs intermédiaires) : Si f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

37. **Théorème de Rolle** : Soit f continue sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, dérivable sur $]\mathbf{a},\mathbf{b}[$ telle que $f(a)=f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

38. $\boxed{\text{Théorème (ou formule ou égalité) des accroissements finis}}$: soit $(a,b)\in \mathbb{R}^2$, $a\neq b$,

Soit $\mathbf{f}$ continue sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, dérivable sur $]\mathbf{a},\mathbf{b}[$, alors : $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

39. $\boxed{\text{Iégalité des accroissements finis}}$: Si f est dérivable sur I (intervalle de $\mathbb{R}$) et **si** $\exists k\in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall x\in I,\ \ |f'(x)|\leq k$, alors $\forall (a,b)\in I^2,\ \ |f(b)-f(a)|\leq k|b-a|$.

Remarque : savoir repérer dans un énoncé $f(b)-f(a)$ et penser aux "A.F."

Exercice 2 : Montrer que $\forall n\geqslant 1$: $\dfrac{1}{3(n+1)^{2/3}} < \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} < \dfrac{1}{3(n)^{2/3}}$.

40. En déduire que si f est dérivable sur I et si f' est bornée sur $I\subset\mathbb{R}$ alors f est lipschitzienne.

41. Soit $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I, on a alors :
f est une **fonction convexe** sur I si et seulement si $f''\geqslant 0$ sur I.

Exercice 3 : $\forall x\in[0,\dfrac{\pi}{2}],\quad \dfrac{2}{\pi}x\leqslant \sin x\leqslant x$

42. $\boxed{\text{Théorème de la limite de la dérivée}}$: f est définie sur I et $a\in I$.
Si ...

43. Si f est continue sur I, dérivable sur $I-\{a\}$, et si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$, alors

44. **Formule de Leibnitz** : Si f et g sont n fois dérivables alors $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=}$

Exercice 3 : Si $f(x)=x^2$ et $g(x)=e^x$, alors déterminer $(fg)^{(n)}$.

Exercice 4, classique : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $F(x)=e^{-x^2}$.
Déterminer $F^{(n+1)}(x)$ en fonction de $F^{(n)}(x)$ et de $F^{(n-1)}(x)$.
On pourra aussi noter $F^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, et on pourra remarquer que $F^{(n+1)}=(F')^{(n)}$.

45. **Ppté** : $\boxed{\forall x>-1,\ \ \ln(1+x)\leqslant x \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ \ e^x\geqslant 1+x}$.

46. Soit f d'un intervalle I dans un intervalle J , **bijective**.
$*$ f continue sur $I \Longrightarrow f^{-1}$...

$*$ f dérivable en $x\in I$ et .... $\Longrightarrow f^{-1}$ est dérivable en $y=$

et dans ce cas : $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ où $y=f(x)$.

47. Si f est une bijection de I sur J, f dérivable sur I et si $\forall x\in I, f'(x)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J=$

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

48. Soit $n\geq 1$, si f est une bijection de I sur J, f de classe C^n sur I et si $\forall x\in I, f'(x)\neq 0$, alors f^{-1} est de classe C^n sur J.