POLYNÔMES, suite et fin

Théorème : Soit P, un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, tel que $\deg P \leqslant n$.
Si P admet au moins $n+1$ racines distinctes (en particulier s'il en admet une infinité) alors $P =$

Théorème : Si $\deg P \leqslant n$, alors $P^{(\cdots\ )} = 0$. (par exe, si $P(X) = aX + b$, alors ... $=0$)

Déf : $a \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ de P si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^s Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$

Formule de Taylor en $a \in \mathbb{K}$: si $d^0 P \leqslant n$ alors $P(X) =$

Démo : par récurrence ou en appliquant l'inégalité de Taylor Lagrange :

Conséquence : Caractérisation des racines d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ de P :
$a \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre s de $P \Longleftrightarrow P(a) = P'(a) = ... = P^{(s-1)}(a) = 0$ et $P^{(s)}(a) \neq 0$.

Définition : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$
P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il existe n non nul, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$.
(c'est à dire, si toutes ses racines complexes sont dans $\mathbb{K}$.)

Exercice n°1 : $(X-1)(X^3-1)$ est-il scindé sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?

Relations coefficients-racines :

Exemple à connaitre : Si $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha\beta = p \end{cases}$, s et p étant connus, alors α et β sont les racines de

$P = \cdots$

Propriété :

Soit $P = a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0$,
avec $a_n \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = ...$ et $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i =$

démo sur feuille.

Exercice n°2 : Donner les relations coefficients-racines si :
$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ avec $a \neq 0$.

Théorème de d'Alembert-Gauss :
si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $d^\circ P \geq 1$ alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Définition :
un **polynôme P est irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ si $\begin{cases} d^\circ P \geq 1 \text{ et} \\ P \text{ n'est divisible que par } \alpha \in \mathbb{K}^* \text{ et par } \lambda P \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}^* \end{cases}$

Les polynômes irreductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Les polynômes irreductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
1. les polynômes de degré 1
2. les polynômes de degré 2 sans racines réelles

Tous les autres polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont donc NON irreductibles.

Exercice n°3 :
Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $d^\circ P = 3$, alors montrer que P admet au moins une racine réelle (2 démo).

Lien entre la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et α une racine de P avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\overline{\alpha}$ est racine de P.
démonstration :

Exercice n°4 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et α une racine complexe non réelle de P, alors montrer que P se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ par : $P = (X^2 + bX + c)Q$, avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, et $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Théorème : unicité de la décomposition en produit de polynômes irréductibles.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, P non constant, alors $\exists!(P_1, P_2, ..., P_r)$: polynômes irréductibles unitaires 2 à 2 distincts, $\exists!(s_1, s_2, ..., s_r) \in \mathbb{K}^r$ et $\exists!\lambda \in \mathbb{K}^*$ tels que $P = \lambda P_1^{s_1} P_2^{s_2} ... P_r^{s_r}$. (unicité à une permutation près des polynômes)
Conséquence : Si α est racine d'ordre $s \geq 1$ de PQ et si $P(\alpha) \neq 0$, alors α est racine d'ordre s de Q.

"Méga-astuce" pour factoiser les polynômes bi-carrés du quatrième degré tel que $P = X^4 + X^2 + 9$.

On écrit $P = X^4 + X^2 + 9 = [X^4 + 9] + X^2 = [(X^2 + 3) - ...$

Exemples de factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Dans $\mathbb{C}$ $[X]$, $X^n - 1 =$

2. Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^6 - 1 =$

3. Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^6 - 1 =$

4. Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 + 2X^2 + 4 =$