PROGRAMME DE COLLE N°11

SPE PSI

du 25 mars au 5 avril 2024

Tout sur les produits scalaires :

Projection orthogonale.
$*$ si F =Vect$(e_1, e_2, ..., e_k)$, alors $y = p_F(x) \iff y \in F$ et $\forall i \in [\![1, k]\!], (x - y|e_i) = 0$
$*$ si F possède une BON : $(e_1, e_2, ..., e_k)$, alors $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} < x, e_i > e_i$
Distance d d'un vecteur à un SEV : définition, ppté : $d = ||x - p_F(x)||$
Distance d'un vecteur à un hyperplan (+**<u>dém</u>**).

Séries entières :

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$ de $\{\rho \in \mathbb{R}_+/(a_n\rho^n)_n$ est bornée$\}$.
Premières propriétés : si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ CVA, et si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.
Propriétés : $*$ Si $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| < k \Longrightarrow \sum a_n z^n$ CV) alors $k \geqslant R$
$*$ Si $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| > k \Longrightarrow \sum a_n z^n$ DV alors $k \leqslant R$

Utilisation de la règle de d'Alembert (uniquement pour les séries numériques).
Comparaisons : On note R_a (et R_b) les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ (et de $\sum b_n z^n$).
$*$ si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$ (de même si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang)
$*$ si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$
Somme. Produit de Cauchy de 2 séries entières
$\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Série entière de la variable réelle :
Une série entière converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence(+**<u>dém</u>**).
S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est C^∞ sur $]-R, R[$ et $S^{(k)}$ s'obtient en dérivant terme à terme (et les séries dérivées ont même rayon de CV).
Csq : $a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$, donc les coefficients sont uniques.

<u>Exo très classique</u> : connaitre et savoir retrouver très rapidement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$.

Intégration terme à terme sur tout segment de $]-R, R[$ ($\sum a_n x^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence).

Développement en S.E. d'une fonction (unicité des coefficients : $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$), série de Taylor.
Ppté : f est DSE $\Longrightarrow f$ est C^∞ sur $]-R, R[$ et $f(x) =$ la somme de sa série de Taylor.
Développement en série entière à connaitre : $e^{\alpha x}$ (où $\alpha \in \mathbb{C}$), $\text{ch}x, \text{sh}x, \cos x, \sin x, \dfrac{1}{1-x}, \dfrac{1}{1+x}$,
$\ln(1+x), \ln(1-x)$, $(1+x)^\alpha$((+**<u>dém</u>**) : technique de l'équation différentielle),
$\arctan x$ et $\arcsin x$ à savoir retrouver rapidement. (+**<u>dém</u>**).

Exo classique : valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$(+**<u>dém</u>**) : voir bas de page (on apportera le plus grand soin à la présentation. Ne pas écrire les 2 horreurs suivantes : "$||R_n(x)||_\infty$", ou "$f(x)$ est continue sur [0,1]").

Fonction génératrice :

$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$ est la somme d'une S.E. de rayon de CV $\geqslant 1$.
G_X est continue sur [-1,1]
A connaitre : fonction génératrice d'une v.a. X qui suit une loi binomiale, géométrique (+**dém** pour la géométrique) ou une loi de Poisson (savoir la retrouver pour une loi uniforme)
Si G_X est dérivable en 1, alors $E(X) = G'_X(1)$.
Exo classique : si G_X est 2 fois dérivable en 1, alors $G''_X(1) = E(X(X-1)$.
Fonction génératrice d'une somme de 2 v.a. indépendantes. Application à la somme de 2 lois de Poisson indépendantes.

Equations différentielles : révision de sup :

∗ Equation différentielle du premier ordre, méthode de variation de la constante.

∗ Equations différentielles scalaires du second ordre à coefficients constants : solutions de l'équation homogène (en parallèle, révision des suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, il est de dimension 2.
Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme :

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \text{ (avec } (a,b,A,\omega) \in \mathbb{R}^4) \quad \text{ou} \quad P(t)e^{\gamma t}.$$

∗ Théorème de Cauchy linéaire pour une équations différentielles du second ordre à coefficients continues et sous forme normalisée : existence et unicité de la solution du problème de Cauchy.
Thm : S(H) est un espace vectoriel de dimension 2 (+**dém**)

Fin des programmes de colle pour cette année scolaire. **MERCI A TOUS**.
Rendez-vous au mois de mai pour la préparation des oraux...

$\boxed{\text{démonstration détaillée de } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$: soit avec le thm de la double limite (fait dans le cours), soit en montrant la continuité de S, comme ci-dessous :

$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (rayon de convergence : $R = 1$)

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in [0,1]$: en effet $S(1)$ existe (série harmonique alternée).
On a donc : $\forall x \in [0,1[$ (**ouvert en 1**), $\quad S(x) = \ln(1+x)$, donc
$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} S(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2$ (continuité de ln en 2).
Montrons que S est continue sur [0,1].
On pose $f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$ (**fermé en 1**)

- $\forall n \geqslant 1, f_n$ est continue sur [0,1].
- ∗ d'après le théorème des séries alternées $\sum f_n$ converge simplement sur [0,1] (expl. orales...)

∗ d'après ce TSA, on a aussi : $\forall x \in [0,1], |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ **indépendant** de x,
donc $0 \leqslant ||R_n||_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+1}$, et par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0,1]} = 0$, donc $((R_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur [0,1] donc) $\sum f_n$ converge uniformément sur [0,1],

donc S est continue sur [0,1], donc en 1, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} S(x) = S(1)$

Par unicité de la limite $S(1) = \ln 2$.